CAIM 2022

Proceedings of
THE 29TH CONFERENCE ON APPLIED AND INDUSTRIAL MATHEMATICS

Chisinau, Moldova, August 25-27, 2022

dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Choban

Communications in Education

CHISINAU 2022

CZU: 51+378.091(082)=135.1=111=161.1
C 65

TIRASPOL STATE UNIVERSITY
5, Gh. Iablocikin street, Chisinau, Republic of Moldova, MD 2069
WEB address: https://ust.md/

Recommended for publication by the Senate of the Tiraspol State University
Editor: prof. Liubomir Chiriac
Technical editor: Maria Pavel

Authors are fully responsible for the content of their papers

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Conference on Applied and Industrial Mathematics (29 ; 2022 ; Chişinău). CAIM 2022. Proceedings of the 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Choban, August 25-27, 2022 : Communications in Education / editor: Liubomir Chiriac. – Chişinău : US Tiraspol, 2022. – 251 p. : fig., tab.

Antetit.: Tiraspol State Univ. – Texte : lb. rom., engl., rusă. – Rez. paral.: lb. rom.-engl., engl.-rusă. – Referinţe bibliogr. la sfârşitul art. – With financial support provided by the Nat. Agency for Research and Development. – 100 ex.

ISBN 978-9975-76-401-8.
51+378.091(082)=135.1=111=161.1
C 65

Work carried out within the scientific research project "Methodology of ICT implementation in the process of studying real sciences in the education system of the Republic of Moldova from the perspective of inter/transdisciplinarity (STEAM concept)", included in the "State Program" (2020-2023), Priority IV: Societal challenges, number 20.80009.0807.20, with financial support provided by the National Agency for Development and Research

Copyright © Tiraspol State University, 2022
All rights reserved

ISBN 978-9975-76-401-8

TABLE OF CONTENTS / CUPRINS

Chiriac Liubomir, **Pavel Maria**. Cuvânt înainte 5
Calmuțchi Laurențiu. Academicianul Mitrofan Cioban a fost și rămâne o stea în lumea matematicienilor 7

PLENARY COMMUNICATIONS 9
Achiri Ion. Matematica școlară în context transdisciplinar 10
Alberdi Celaya Elisabete, **Álvarez González Irantzu**. Analysis of mobility for the Biscay Campus and proposal for improvement from the point of view of sustainability 15
Globa Angela, **Pavel Maria**, **Pavel Dorin**. Importanța studierii proprietăților numerelor întregi în instruirea de performanță 16
Lupu Ilie. Școala științifică „Teoria și metodologia instruirii (științe exacte și ale naturii)" și rolul ei în pregătirea cadrelor științifice de înaltă calificare 31

COMMUNICATIONS IN EDUCATION 36
Afanas Dorin. Convergența seriei $\sum \frac{1}{n^2}$ și aplicațiile ei 37
Afanas Dorin. Programarea servomotorului și sugestii de utilizare 44
Alberdi Celaya Elisabete, **Álvarez González Irantzu**, **Sánchez Zuriñe Tapia**. Application of heuristic methods in the optimization of routes contributing to sustainability 51
Baltag Iurie. Unele aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie și combinatorică 52
Bocancea Viorel, **Postolachi Igor**, **Postolachi Valentina**. Determinarea parametrilor mișcării accelerate 53
Bogdanova Violeta, **Chiriac Liubomir**. Pedagogical modeling of the process of teaching the university discipline „Information Security" 61
Bordan Valeriu. Despre congruențele de gradul doi după un modul prim 67
Bostan Marina. Aplicarea testului (u) Mann-Whitney la prelucrarea rezultatelor experimentale privind studierea cursului universitar „Teoria Grafurilor" 72
Braicov Andrei. Comunitatea digitală – mediu de formare profesională continuă a profesorilor de matematică 78
Calmuțchi Laurențiu. Restabilirea triunghiului, fiind date trei puncte speciale 87
Calmuțchi Laurențiu, **Filipopolschi Ecaterina**. Formarea competențelor matematice la elevi prin rezolvare de probleme aplicative 95
Cerbu Vladimir. Probleme de numărare 103
Chiriac Eugenia, **Grigorcea Sofia**, **Nedbaliuc Boris**. Țesuturile mecanice din tulpina unor magnoliofite – model de construcție inginerească și sursă de fibre textile 110
Chiriac Liubomir, **Chiriac Eugenia**, **Lupașco Natalia**, **Pavel Maria**. Paradigme moderne în dezvoltarea și învățarea Inteligenței Artificiale 116
Chiriac Liubomir, **Danilov Aurel**. Aspecte didactice privind studierea algoritmului de criptare RSA, funcțiilor hash și semnăturii digitale 125

© TSU, 2022

Corlat Andrei, **Jardan Ion**. Metode de rezolvare a ecuațiilor transcendente 135
Cristei Maria. Software popular pentru modelarea 3D 139
Dohotaru Leonid, **Jardan Ion**. Rezolvarea unor probleme de geometrie cu ajutorul numerelor complexe 144
Dohotaru Leonid, **Jardan Ion**. Rezolvarea unor sisteme de ecuații algebrice 148
Duminică Traian. Unele metode de calcul ale primitivelor și integralelor definite 152
Gasnaș Ala. Explorarea metodelor de predare a cursului de programare „Limbaje de Asamblare” 156
Hajdeu Mihaela. Despre competența matematică a cadrelor didactice prin prisma unor studii internaționale 162
Maftea Serghei. Consideraţiuni privind metoda inducției matematice 167
Melnyk Vasyl, **Melnyk Halyna**. Using of GitHub Classroom tools in Programming Classes 173
Pavel Dorin, **Globa Angela**, **Pavel Maria**. Soluție software gratuită pentru prelucrarea statistică a rezultatelor experimentului psihopedagogic 174
Sali Larisa, **Anton Felicia**. Dezvoltarea gândirii critice a elevilor prin utilizarea contraexemplelor în procesul de studiere a matematicii 184
Sali Larisa, **Covalciuc Mirela**, **Cașu Natalia**. Importanța contextelor cu caracter aplicativ în dezvoltarea motivației pentru studierea matematicii 194
Snizhko Nataliia. On the problems of teaching the higher mathematics in english 200
Solovei Lilia. Cu privire la metode de predare a matematicii pentru studenţii cu nivel diferit de pregătire liceală 203
Teleucă Marcel, **Sali Larisa**, **Choban-Piletskaya Antonina**. Dezvoltarea abilităților de modelare matematică 206
Țarălungă Boris. On the Pythagorean m–tuples 212
Țarălungă Boris, **Bordan Valentina**. Integral Solutions of the Diophantine Equations $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{3}$ 213
Țarălungă Boris, **Mușinschi Lidia**. A note on two Diophantine equations $3^x+22^y=z^2$ and $3^x+33^y=z^2$ 214
Țurcanu Alina. Unele procedee de calcul ale limitelor 215
Vascan Teodora. Aspecte privind proiectarea și realizarea proiectelor STEAM 220
Veveriţa Tatiana. Despre combaterea plagiatului în lucrările științifice 227
Zastînceanu Liubov. Utilizarea resurselor digitale în formarea matematică a elevilor din clasele cu profil umanist 232
Балашова Юлия. О некоторых способах сокращения факторного пространства 238
Банул Ксения. О проблеме формирования коммуникативной компетенции медицинского работника 241
Кожухарова Татьяна. Из опыта применения познавательных задач на уроках математики 249

© TSU, 2022

CUVÂNT ÎNAINTE

Orice manifestare științifică este un bun prilej pentru comunitatea științifică de a face schimb de idei, experiențe și bune practici. În acest context, organizarea în cadrul Universității de Stat Tiraspol a conferinței internaționale CAIM XXIX, dedicată academicianului Mitrofan M. Cioban, este un eveniment de o semnificație simbolică deosebită pentru tot corpul profesoral.

Universitatea de Stat din Tiraspol (UST) a fost fondată în anul 1930 și este considerată prima instituție superioară de învățământ din Republica Moldova. Pe parcursul istoriei sale a fost trecută prin foc și sabie de nenumărate ori: profesori exilați, studenți deportați, rectori împușcați, evacuată de câteva ori în perioada celui de-al doilea război mondial. UST, universitate regională din Transnistria, simbol al rezistenței și demnității naționale din stânga Nistrului, apărând cu dârzenie Constituția RM, nu s-a subordonat regimului anticonstituțional din orașul Tiraspol și în urma conflictului transnistrean din anul 1992 a fost forțată să se evacueze în orașul Chișinău. În anul 2022, UST dispunea de un contingent de circa 3000 studenți și circa 85% din profesori doctori în științe. Un indicator calitativ al excelenței foarte bun, nu numai comparativ cu alte universități din țară dar și cu media europeană. Pe parcursul a 92 de ani de activitate prodigioasă, a reușit să pregătească circa 100 000 de specialiști de calificare înaltă pentru economia națională, decorată fiind cu ordinul ”Credinței Patriei” clasa I, pentru muncă asiduă, rezultate frumoase înregistrate, abnegație și patriotism în raport cu idealurile naționale. În urma lansării unei reforme universitare mai puțin inspirată, prima instituție superioară de învățământ, după 92 de ani de activitate, a fost forțată să fuzioneze cu Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău. Nu avem informații dacă s-au mai produs reforme similare în spațiile educaționale civilizate în ultimii 100 de ani. Rămâne de examinat fenomenul lichidării primei universități din țară din mai multe perspective, inclusiv prin prisma europenizării Republicii Moldova. Dar acest lucru se va produce puțin mai târziu. Mai jos vom puncta unele repere istorice care țin de dezvoltarea UST.

Începând cu anul de studii 2005-2006, în Universitate au fost puse în aplicare exigențele Procesului de la Bologna și ale creării Spațiului European al Învățământului Superior, a fost implementat în legătură cu aceasta Sistemul European de Credite Transferabile (ECTS). În anul 2007, UST avea deja acreditate toate cele 21 de specialități ale sale. În anii de studii 2014-2016, în scopul acreditării UST, a fost realizată cu succes, în premieră pentru Moldova, evaluarea externă de către Agenția Germană de Asigurare a Calității (AQAS) a programelor de licență: Matematica și Informatica, Biologie și Chimie, Pedagogia învățământului primar. În anul 2022, UST avea deja absolut toate 32 specialități la ciclul I și 26 de programe la ciclul II, acreditate de ANACEC. Investigațiile științifice, din cadrul UST, se efectuează în bază de proiecte instituționale, proiecte pentru tinerii cercetători și în cadrul Programului de Stat obținut prin concurs sau la catedrele universitare. În anii 2020-2023 în cadrul instituției se desfășoară 5 proiecte de stat și 20 proiecte interne. Colaboratorii universității participă activ la un șir de proiecte internaționale finanțate de diferite organizații internaționale, ce susțin centrele universitare (ERASMUS, TEMPUS, UNESCO-TEMPUS). Unul dintre criteriile de evaluare a activității anuale a cadrelor profesoral-didactice este recunoașterea națională și internațională a lor. Anume mobilitatea internațională ne permite să fortificăm colaborările reciproce cu multe universități din România, Polonia, Ucraina, Bulgaria, Rusia, Germania, Franța, Belgia, Italia, S.U.A. etc.

© TSU, 2022

Un rol important în dezvoltarea didacticilor științelor reale și pregătirea cadrelor de calificare înaltă, în cadrul UST, l-a avut academicianul Mitrofan M. Cioban, care în cooperare cu I. Lupu, dr. hab., profesor universitar, A. Hariton, dr., profesor universitar, în anul 2002, au constituit Școala Doctorală „Teoria și metodologia instruirii" din cadrul Universității de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău) care s-a dovedit a fi unica în Republica Moldova. Cercetările remarcabile în cadrul școlii respective s-au axat, în mod special, pe didacticele științelor exacte și ale naturii (matematică, fizică, informatică, chimie, biologie, geografie). Grație cercetărilor avansate în domeniul didacticii, în cadrul UST a fost fondat unicul seminar științific de Profil și Consiliul Științific Specializat în domeniul didacticii științelor exacte și ale naturii în Republica Moldova. În calitate de conducători științifici, în cadrul Școlii doctorale „Teoria și metodologia instruirii", au înregistrat rezultate frumoase: Mitrofan Cioban, dr. hab., prof. univ., academician al AȘM; Ilie Lupu, dr. hab., prof. univ.; Andrei Hariton, dr., prof. univ.; Liubomir Chiriac, dr. hab., prof. univ.; Laurențiu Calmuțchii, dr. hab., prof. univ.; Andrei Braicov, dr., conf. univ.; Viorel Bocancea, dr., conf. univ.; Valeriu Cabac, dr., prof. univ.; Eduard Coropceanu, dr., prof. univ.; Anatol Gremalschi, dr. hab., prof. univ.; Vasile Panico, dr., prof. univ.; etc. Astfel, pe parcursul ultimii 20 de ani de activitate, în cadrul Școlii doctorale respective au fost susținute 47 de teze doctor în științe. Un rezultat frumos pentru Școala doctorală din cadrul UST și un rezultat excelent pentru știința pedagogică din țara noastră.

În acest context, ținem să subliniem faptul că Adelina Georgescu, dr., profesor universitar, primul președinte ROMAI, fondatoarea „mișcării pro-matematică aplicată și industrială", în România și Republica Moldova, chiar la I ediție a CAIM-ului, în anul 1993, a formulat problema privind necesitatea abordării, la conferințele ROMAI, a educației matematicii și informaticii din prisma inter/transdisciplinarității ca o soluție practică la provocările timpului și a constrângerilor cu care se confruntă societatea modernă. Cercetările realizate de A. Georgescu la frontiera dintre diverse domenii științifice, conțineau un profund spirit interdisciplinar. Președintele ROMAI, A. Georgescu în parteneriat cu academicianul Mitrofan Cioban au încurajat și stimulat cooperarea cercetătorilor din diferite domenii, identificând probleme interdisciplinare, și propunând metode și instrumente noi de cercetare.

Pentru merite deosebite în domeniul cercetării și a pregătirii specialiștilor de înaltă calificare, inclusiv pentru UST, dnei A. Georgescu, dr., prof. universitar, în anul 2006 i s-a decernat Doctor Honoris Causa a UST, un gest de mândrie pentru profesorii și studenții UST, pentru colegii ROMAI. În contextul dat este necesar de menționat că profesorii UST au participat activ la toate edițiile CAIM-ului în calitate de membri ai Comitetului de organizare și Comitetului de Program al Conferințelor CAIM-I – CAIM-XXIX. UST a fost co-organizator la 6 ediții CAIM: 3 (1995), 4 (1996), 14 (2006), 20 (2012) , 26 (2018), 29 (2022).

Suntem siguri ca ediția XXIX CAIM, dedicată ilustrului matematician Mitrofan Cioban, va contribui substanțial la cooperarea internațională intre reprezentanții diverselor științe, iar acest volum va fi util tuturor celor interesați de educația inter/transdisciplinară și prin intermediul ideilor din articolele publicate va fi stimulată și încurajată educația în domeniul didacticii științelor reale.

Liubomir Chiriac, dr. habilitat, profesor universitar
Maria Pavel, dr., conferențiar universitar

© TSU, 2022

ACADEMICIANUL MITROFAN CIOBAN A FOST ȘI RĂMÂNE O STEA ÎN LUMEA MATEMATICIENILOR

THE ACADEMICIAN MITROFAN CIOBAN WAS AND REMAINS A STAR IN THE WORLD OF MATHEMATICIANS

Laurențiu CALMUȚCHI
discipol al academicianului Mitrofan Cioban, UST
e-mail: lcalmutchi@gmail.com

Academicianul Mitrofan Cioban s-a născut la 5 ianuarie 1942 în satul Copciac, județul Tighina în familia lui Mihai și Teclei Ciobanu. După absolvirea a trei cursuri de la facultatea Fizică și Matematică, ca unul dintre cei mai talentați studenți, a fost transferat sa-și continue studiile la Universitatea M.V. Lomonosov din Moscova. La început i-a fost foarte greu din cauza diferențelor programelor de studii și mai ales de cunoașterea slabă a limbii ruse. În schimb a avut mare noroc de dascăli buni (A.V. Arhangheliskii, P.S. Alexandrov, L.V. Keldăș, A. Kuroș, V. Ponomarev, V. Kolmogorov, P.S. Novicov, A.N. Tihoniv, L.A. Scorniacov, M.M. Postnicov, A. Malțev), ce l-au îndrumat și au văzut în el acel discipol, care prin munca sa zi de zi și talentul său își va depăși mentorii și va lăsa o urmă adâncă în brazda științei matematice. Pe parcursul anilor de studenție M. Cioban a publicat 5 articole în cele mai prestigioase reviste „Доклады Академии Наук”, „Труды Московского Математического Общества” și „Вестник Московского Университета”. În anul 1970 M. Cioban susține teza de doctor în științe fizico-matematice, cu tema „Relații dintre clase de spații topologice”. Din anul 1970 a activat în cadrul Universității de Stat den Tiraspol, ocupând succesiv posturile de conferențiar, profesor, șef de catedră, prorector pentru știință, rector. În anul 1980 susține teza de doctor habilitat. În anul 1995 este ales membru corespondent, iar în 2000 este ales Academician al Academiei de Științe a Moldovei. În perioada anilor 1999-2021 a activat în calitate de Președinte al Societății de Matematică din Republica Moldova. Mult timp a fost ales și a activat ca vicepreședinte al Societății Române de Matematică Aplicată și Industrială, unde în colaborare cu distinsa Profesoară Adelina Georgescu au organizat mai multe ediții ale Conferințelor de Matematică Aplicată și Industrială, la care au participat matematicieni din diferite țări, inclusiv din Republica Moldova.

Direcția principală de cercetare a fost „Clasificarea spațiilor și funcțiilor (aplicațiilor)”. Această direcție determină un număr impunător de domenii de interese științifice. Rolul teoriei aplicațiilor se extinde în mod esențial dacă odată cu aplicațiile univoce se examinează și aplicațiile multivoce. În anul 1967 dl. M. Cioban a introdus o nouă metodă de construire a secțiunilor, numită de autor „metoda acoperirilor”, în prezent numită „Choban method”, sau metoda Ciobanu. Această metodă este mult mai puternică decât cele cunoscute anterior. Cu ajutorul acestei metode s-au obținut un număr mare de rezultate foarte importante în diferite domenii ale matematicilor moderne. Au fost demonstrate un șir de teoreme referitoare la existența secțiunilor continue și măsurabile. Unul dintre rezultate conține soluția importantă

© Calmutchi Laurentiu, 2022

a problemei lui E. Michael, formulată în anul 1990, despre G_δ –secțiuni în mulțimea aplicațiilor deschise ale spațiilor compacte. Din punctul de vedere al existenței diferitor tipuri de secțiuni M. Cioban a reușit să caracterizeze diferite clase de spații.

Fiecare rezultat obținut de M. Cioban nu prezintă un fapt izolat, dar este un element dintr-un lanț armonios de concepte și rezultate.

Cercetările propuse de M. Cioban:

- Conțin o analiză extinsă și profundă a spațiilor și aplicațiilor determinate de conținutul problemei;
- Propun, după necesitate, noi clase de spații care armonios și natural se încadrează în structura claselor de spații construite;
- Pentru fiecare clasă de spații introdusă se determină relațiile cu unele clase clasice de spații ce permite să stabilească locul clasei în structura ierarhică a claselor de spații cunoscute;
- Determină comportarea la diverse aplicații a clasei de spații propuse și se construiesc exemple care determină particularitățile clasei de spații propuse.

Toate cele expuse permit de a construi noi teorii elegante și de a rezolva problemele apărute. Pe parcursul anilor Academicianul Mitrofan Cioban a reușit să rezolve zeci de probleme formulate de personalități notorii în lumea matematică și care multe decenii nu fusese anterior soluționate. Printre aceste sunt probleme formate de așa savanți cum: E. Mihael, E. Hausdorf, A.N. Tihonov, P.S. Alexandrov, A.V. Arhanghelkii, A. Pelcinsckii, W. Konfort, B.A. Passankov, A.I. Malțev, Felstph și Namioca etc.

Monografiile domnului academician *Teoria spațiilor P-disperse, Algebre universale topologice, Extensii Compacte ale Spațiilor Topologice* au devenit lucrări de referință pentru savanți din lumea întreagă și surse puternice de cunoaștere pentru tineretul studios. Multe rezultate obținute de M. Cioban au stimulat nenumărate cercetări științifice a multor matematicieni din lume, au devenit clasice și au fost incluse în multiple monografii și manuale de topologie, analiză, optimizare și algebră topologică scrise de mari corifei matematicieni din diverse țări.

Mult, foarte mult poate fi spus despre Omul, academicianul Mitrofan Ciobanu, dar în câteva cuvinte, puternica și erudita personalitate am putea-o caracteriza prin faptul că a fost un reprezentant destoinic al acestui meleag, un Om al neamului, înzestrat cu un intelect deosebit, cu o inepuizabilă energie creatoare și putere de muncă, dragoste nemărginită de oameni și responsabilitate pentru destinul lor.

Academicianul M. Cioban împreună cu discipolii săi, profesorii L. Calmuțchi și L Chiriac, pentru un ciclu de lucrări *Metode funcționale și algebrice în topologie*, au fost decernați cu Premiul de Stat al Republicii Moldova în domeniul științei, tehnicii și producției pe anul 2001.

Pentru contribuția semnificativă adusă la dezvoltarea matematicii moderne și la pregătirea cadrelor profesionale, științifice și științifico-didactice domnul academician Mtrofan Cioban a fost decorat cu ordinele *Gloria Muncii, Ordinul de Onoare* și *Ordinul Republicii.*

© Calmutchi Laurentiu, 2022

Plenary Communications

CZU: 372.851:001.2

MATEMATICA ȘCOLARĂ ÎN CONTEXT TRANSDISCIPLINAR

Ion ACHIRI
Institutul de Științe ale Educației, Republica Moldova
e-mail: ionachiri@mail.ru

Rezumat. În articol este abordată problema rolului disciplinei școlare Matematica din perspectiva implementării paradigmei transdisciplinare în sistemul educațional din Republica Moldova. Se evidențiază, că în activitatea sa profesorul de matematică poate realiza diverse aspecte privind realizarea conexiunilor transdisciplinare: activități transdiscipliinare în cadrul lecțiilor, lecții transdisciplinare, proiecte STEM și STEAM. Se argumentează că disciplina Matematica trebuie să fie studiată la toate treptele de școlarizare ca disciplină monodisciplinară.
Cuvinte cheie: matematica, disciplina școlară, integrare, transdisciplinaritate, monodisciplinaritate, sistem educațional, paradigma educațională, educație.

Abstract. The article addresses the issue of the role of school discipline Mathematics from the perspective of implementing the transdisciplinary paradigm in the educational system of the Republic of Moldova. It is highlighted that in his activity the mathematics teacher can make various aspects regarding the realization of transdisciplinary connections: transdisciplinary activities within the lessons, transdisciplinary lessons, STEM and STEAM projects. It is argued that the school discipline Mathematics must be studied at all levels of schooling as a monodisciplinary school discipline.
Keywords: mathematics, school discipline, integration, transdisciplinarity, monodisciplinarity, educational system, educational paradigm, education.

Sistemele educaționale trebuie să reacționeze la schimbările survenite care redefinesc nevoile pe care societatea în ansamblul său le are față de sistemul educație.

Educația este obligată să facă față provocărilor societale din ultimele decenii, inclusiv, provocărilor privind *globalizarea, migrația, sărăcia, pandemia, protecția mediului, explozia informațională, conflictele* etc. Principala caracteristică a acestor provocări este *complexitatea.* Pentru a face față incertitudinilor și schimbărilor continue, caracteristice economiilor de piață, absolvenții școlii au nevoie de competențe strategice, cum ar fi cele *de a învăța cum să învețe, de rezolvare de probleme, de gândire critică, de evaluare, de management* ș.a.

Constatăm că, la etapa actuală, școala din Republica Moldova nu se isprăvește cu misiunea sa principală - ***pregătirea absolventului pentru activitatea în viața reală.*** Problema constă în faptul că ***școala noastră este monodisciplinară***, iar ***viața este transdisciplinară***. Pentru a exclude această contradicție e necesar de implementat în sistemul educațional din Republica Moldova ***paradigma transdisciplinară***.

Un prim pas în soluționarea problemei privind ***pregătirea absolventului pentru activitatea în viața reală*** ar fi integrarea disciplinelor școlare [1].

Modalitățile concrete de integrare a disciplinelor ar putea fi:

© Achiri Ion, 2022

- *integrarea în jurul unui pol științific, practic, personal sau social;*
- *integrarea în jurul unei singure discipline;*
- *integrarea în jurul unor activități fundamentale (creație, construcție, cercetare);*
- *integrarea în jurul unor fenomene sociale, economice, practice;*
- *integrarea printr-un ansamblu flexibil de lecții, fiecare dintre ele fiind concepută printr-o schemă integrativă de tipul noțiunile esențiale ale domeniului, metodele de cercetare specifice, fenomene implicate, variante de optimizare sau de soluționare.*

Alături de aceste modalități de organizare a conținuturilor pot sta și alte demersuri inovative și eficiente cum sunt:

- *organizarea din perspectiva informatizării învățământului;*
- *organizarea diferențiată și personalizată;*
- *organizarea conținuturilor pentru educația la distanță;*
- *organizarea conținuturilor învățământului alternativ etc.*

Suntem ferm convinși că **Matematica**, ca disciplină școlară, trebuie să rămână **monodisciplinară** la toate etapele de învățare în școală - școala primară, gimnaziu și liceu. Matematica este una dintre disciplinele școlare fundamentale, care trebuie să fie studiată în școală de către toți elevii. Desigur, **Matematica** a fost și rămâne ***Regina tuturor științelor***. Ea stă la baza studierii tuturor disciplinelor și dezvoltării tuturor științelor. Astfel, toate disciplinele școlare integrate sau monodisciplinare vor utiliza eficient aplicațiile matematicii.

Transdisciplinaritatea priveste - așa cum indica prefixul „trans” - ceea ce se află în același timp și între discipline, și înăuntrul diverselor discipline. Din confruntarea între discipline, a fenomenelor și proceselor complexe, transdisciplinaritatea face să apară noi puncte de intersecție între discipline. Finalitatea ei este înțelegerea lumii prezente, unul din imperativele sale fiind ***unitatea cunoașterii***. Transdisciplinaritatea se deosebește de pluri- si interdisciplinaritate prin finalitatea sa - ***înțelegerea lumii prezente***.

Transdisciplinaritatea – reprezintă gradul cel mai elevat de integrare a curriculumului, mergând adesea până la fuziune. Fuziunea este, așadar, faza cea mai complexă și mai radicală a integrării.

Prin gradul sau de complexitate, abordarea transdisciplinară propune un demers bazat pe dinamica și interacțiunea a patru niveluri de intervenție educațională: monodisciplinar, pluridisciplinar, interdisciplinar și transdisciplinar. Trebuie subliniat faptul ca recunoașterea caracterului distinct al abordărilor menționate nu implică ignorarea caracterului lor profund complementar. B. Nicolescu, unul dintre autorii paradigmei transdisciplinarității afirma „disciplinaritatea, pluridisciplinaritatea, interdisciplinaritatea și transdisciplinaritaatea sunt cele patru săgeți ale unuia și aceluiași arc: al cunoașterii”. (B. Nicolescu, 1997) [5].

© Achiri Ion, 2022

Instaurarea unei culturi transdisciplinare, este imposibilă în absența unui nou tip de educație care să țină cont de toate dimensiunile ființei umane. Educația se află în centrul devenirii noastre. Viitorul este structurat prin educația făcută în momentul prezent aici și acum. Raportul Comisiei Internaționale a Educației pentru Secolul al XXI-lea aparținând UNESCO, cunoscut și sub numele de Raportul Delars, pune accentul pe patru piloni ai unui nou tip de educație: **a învăța să cunoști, a învăța să faci, a învăța să trăiești alături de ceilalți și a învăța să exiști.** În acest context, abordarea transdisciplinară poate avea o contribuție importantă în instaurarea unui nou tip de educație. Există o inter-relație destul de evidentă între cei patru stâlpi ai noului sistem de educație: cum să învățăm să facem învățând să cunoaștem și cum să învățăm să fim învățând să trăim împreună. Educația transdisciplinară lămurește într-o nouă manieră nevoia, resimțită din ce în ce mai acut, a unei educații permanente. Ea trebuie să se exercite nu doar în instituțiile de învățământ, de la școala primară la universitate, ci și pe întreg parcursul vieții și pretutindeni.

Aspecte de transdisciplinaritate în studierea matematicii în școală deja sunt prezente în curriculumul la disciplina Matematica, ediția 2019 [2, 3]. Astfel, se propune în fiecare clasă V - XII realizarea unor proiecte STEM și STEAM:

- Proiectul STEM „*O călătorie imaginară prin Moldova*” (clasa a V-a);
- Proiectul STEAM„*Rapoarte și proporții în pictură și arhitectură*” (clasa a VI-a);
- Proiectul STEM *„Variația caracteristicilor meteo pentru o perioadă de 3 luni în localitatea de baștină”* (clasa a VII-a);
- Proiectul STEM *„Funcții în sport”* (clasa a VIII-a);
- Proiectul STEAM*„Aplicații ale figurilor geometrice în design”* (clasa a VIII-a);
- Proiectul STEAM *„Covorul moldovenesc”* (clasa a X-a, profilul real, profilul umanist);
- Proiectul STEAM *„Matematica în culinărie”*(clasa a X-a, profilul umanist);
- Proiectul STEM „*Aplicarea derivatei în economie”* (clasa a XI-a, profilul real);
- Proiectul STEAM *„Credit pentru casa mea”* (clasa a XII-a, profilul real, profilul umanist);
- Proiectul STEM *„Casa mea de vis”* (clasa a XII-a, profilul real, profilul umanist).

Unul dintre obiectivele prioritare ale organizării și desfășurării proiectelor STEM și STEAM este utilizarea cunoașterii disciplinare într-o abordare integrată, transdisciplinară prin învățarea bazată pe probleme nonstandard și pe elaborarea de proiecte. Ca rezultat, elevii sunt implicați în situații de învățare autentice, semnificative, care includ proiectarea, realizarea, testarea, reflectarea și documentarea. Astfel:

- se dezvoltă gândirea critică și autocritică a elevului;
- se încurajează inovația;
- se dezvoltă capacitatea de a colabora și a comunica eficient cu ceilalți atunci când

© Achiri Ion, 2022

abordează o problemă și când formulează soluții;

- se produce înțelegerea prin experimentare;
- sporește motivația pentru învățare.

Elaborarea și realizarea proiectelor STEM și/sau STEAM contribuie eficient la majorarea calității educației și la fortificarea interesului elevilor pentru învățarea matematicii [4].

Desigur, profesorul de matematică poate să proiecteze și să desfășoare *lecții transdisciplinare*, adică acțiuni planificate ce angajează un set de operații organizate sub forma unui algoritm care conține:

1. *Selectarea temei cross-curriculare și analiza competențelor specifice asociate acesteia;*
2. *Identificarea asociațiilor semnificative și conturarea unei imagini globale asupra temei prin realizarea unei hărți disciplinare și conceptuale a temei cross-currriculare;*
3. *Definirea rezultatelor așteptate în termeni de obiective operaționale pe niveluri taxonomice Bloom;*
4. *Planificarea timpului: raportul teoretic/aplicație practică;*
5. *Mobilizarea resurselor: amenajarea corectă a clasei, a laboratorului;*
6. *Completarea unei liste de verificare privind resursele disponibile, activarea dispozitivelor spre utilizare;*
7. *Proiectarea și dirijarea activităților de învățare în sistem de instruire diferențiată;*
8. *Proiectarea și dirijarea activităților de evaluare a rezultatelor elevilor.*

În cadrul lecției de matematică profesorul poate să propună elevilor și activități transdisciplinare.[6, 7, 8]

În concluzie evidențiem, că apărut acum trei decenii aproape simultan în lucrările unor cercetători precum Jean Piaget, Edgar Morin, Eric Jantsch și alții acest termen ***transdisciplinaritate*** a fost inventat pentru a exprima necesitatea distrugerii frontierelor dintre discipline, mai ales în domeniul educației, nevoia depășirii pluri- și interdisciplinarității. Transdisciplinaritatea se referă la ceea ce se află în același timp și între discipline și înăuntrul diverselor discipline și dincolo de orice disciplină. Finalitatea sa este înțelegerea lumii prezente, unul dintre imperativele sale fiind unitatea cunoașterii.

Educația transdisciplinară se bazează pe reevaluarea rolului intuiției, imaginației, sensibilității în dobândirea și aplicatrea cunoștințelor. Rigoarea, deschiderea și toleranța sunt caracteristicile fundamentale ale atitudinii și viziunii transdisciplinare.

Însă nici un proces educațional modern din orice țară nu poate fi realizat doar din **viziunea transdisciplinară**. Este necesară corelarea armonică a monodisciplinarității, pluridisciplinarității și transdisciplinarității la diverse trepte de învățământ. În acest context disciplina școlară Matematica va rămâne o disciplină **monodisciplinară** în Planul

© Achiri Ion, 2022

de învățământ al școlii din Republica Moldova și nu numai, la toate treptele de școlarizare.

Bibliografie

1. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova *Cadrul de referință al curriculumului national.* Chișinău: Lyceum, 2017.
2. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova *Curriculum național. Matematică. Clasele V-IX. Curriculum discipinar. Ghid de implementare* . Coordonator Achiri Ion. Chișinău: Lyceum, 2020. 180 p. ISBN 978-9975-3438-7-9. www.mecc.gov.md
3. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova *Curriculum național. Matematică. C lasele X-XII. Curriculum discipinar. Ghid de implementare*. Coordonator Achiri Ion. Chișinău: Lyceum, 2020. 192 p. ISBN 978-9975-3438-6-2. www.mecc.gov.md.
4. ACHIRI, I.; FRANȚUZAN, L. et. al. *Modele de reconfigurare a procesului de învățare. Aria curriculară Matematică și Științe*. Chișinău: IȘE, 2022.
5. NICOLESCU, B. *La transdisciplinarité (manifeste).* Monaco: Éditions du Rocher, 1996 (trad. rom. Transdisciplinaritatea (manifest), Iași: Polirom, Junimea, 2007).
6. MIHĂESCU, M.; DULMAN, A.; MIHAI, C. *Activități transdisciplinare. Ghid pentru invățători.* București: Radical, 2004.
7. NICHITA, F. Asupra unui model algebric pentru transdisciplinaritate. http://www.it4s.ro/Nichita%20RO.pdf.
8. PETRESCU, P.; POP, V. *Transdisciplinaritatea, o nouă abordare a situațiilor de învățare. Ghid pentru cadre didactice*. București: EDP, 2007.

© Achiri Ion, 2022

CZU: 624:502.33

ANALYSIS OF MOBILITY FOR THE BISCAY CAMPUS AND PROPOSAL FOR IMPROVEMENT FROM THE POINT OF VIEW OF SUSTAINABILITY

Elisabete ALBERDI CELAYA
Irantzu ÁLVAREZ GONZÁLEZ
University of the Basque Country UPV/EHU,
Bilbao, Basque Country (Spain)
e-mail: elisabete.alberdi@ehu.eus

Abstract. The main objective of this project is to integrate sustainability into the curriculum of the Civil Engineering degree at the University of the Basque Country (UPV/EHU). Transport and supply infrastructures, are the main object of the civil engineering, and they have a great impact. Hence, their proper planning and design can contribute significantly in the challenge of a more sustainable society.

In this project, the transport flows to the Campus of Biscay have been analysed, calculating their impact from the point of view of air quality. Different areas have been worked on. On the one hand, mobility at the UPV/EHU has been analysed and proposals for improvement have been made. On the other hand, a traffic study has been carried out (flows and impact on air quality) and new paths for pedestrians that reach the Campus of Biscay have been proposed.

Keywords: sustainable development goals (SDG), civil engineering, mobility, sustainability.

ANALIZA MOBILITĂȚII PENTRU CAMPUSUL BISCAY ȘI PROPUNERI DE ÎMBUNĂTĂȚIRE DIN PUNT DE VEDERE AL SUSTENABILITĂȚII

Rezumat. Obiectivul principal al acestui proiect este de a integra sustenabilitatea în curriculumul specialității Inginerie Civilă de la Universitatea din Țara Bascilor (UPV/EHU). Infrastructurile de transport și aprovizionare sunt obiectul principal de studiu al ingineriei civile si au un impact mare. Prin urmare, planificarea și proiectarea lor adecvată pot contribui în mod semnificativ la provocarea unei societăți mai durabile.

În acest proiect au fost analizate fluxurile de transport către Campusul Biscay, calculându-se impactul acestora din punct de vedere al calității aerului. S-a lucrat la aceasta din diferite aspecte. Pe de o parte, a fost analizată mobilitatea la UPV/EHU și au fost făcute propuneri de îmbunătățire. Pe de altă parte, a fost realizat un studiu de trafic (fluxuri și impactul asupra calității aerului) și au fost propuse noi căi pentru pietonii care ajung în Campusul Biscay.

Cuvinte cheie: obiective de dezvoltare durabilă (ODD), inginerie civilă, mobilitate, sustenabilitate.

© Alberdi Celaya Elisabete, Álvarez González Irantzu, 2022

CZU: 37.016:004

IMPORTANȚA STUDIERII PROPRIETĂȚILOR NUMERELOR ÎNTREGI ÎN INSTRUIREA DE PERFORMANȚĂ

Angela GLOBA
Maria PAVEL
Dorin PAVEL
Catedra de Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: angelagloba@gmail.com, pruteanupavel@gmail.com, paveldorin@gmail.com

Rezumat. În articol sunt expuse aspectele metodologice privind crearea algoritmilor de verificare a proprietăților numerelor întregi, în special, de generare a numerelor Stirling de speța I și speța a II, a numerelor Bell, a numerelor Catalan, numerelor Narayana. Algoritmii propuși sunt elaborați în limbajul de programare C++ și softul MAPLE. Sunt listate un șir de probleme care se reduc la calcularea unui număr ilustru: Stirling, Bell, Catalan, Narayana.
Cuvinte cheie: numere întregi, numere Stirling, numere Bell, numere Catalan, numere Narayana, tehnici de programare, concurs de programare, instruire de performanță.

Abstract. The article sets out the methodological aspects of creating algorithms for verifying the properties of integers, in particular, for generating Stirling numbers of species I and species II, Bell numbers, Catalan numbers, Narayana numbers. The proposed algorithms are developed in the C ++ programming language and the MAPLE software. A series of problems are listed that are reduced to the calculation of an illustrious number: Stirling, Bell, Catalan, Narayana.
Keyword: integer numbers, Stirling numbers, Bell numbers, Catalan numbers, Narayana numbers, programming techniques, programming contest, performance training.

1. Introducere

Este bine cunoscut că problemele propuse pentru rezolvare participanților la concursurile de informatică implică cunoștințe matematice foarte vaste. Mai mult, sunt probleme care pot fi rezolvate în timp de calcul util doar aplicând aparatul matematic. Acest tip de probleme sunt, în mare parte, problemele de combinatorică și probleme de grafică computațională. Pentru scrierea codului de program pentru o problemă de combinatorică participanții la concurs aplică una din tehnicile de programare: Brute force, Backtracking, Greedy, Divide et Impera, Branch and Bound, Programarea Dinamică. Evident, șansa obținerii unui punctaj maxim există în cazul utilizării tehnicii programării dinamice. Pentru celelalte tehnici aplicate există posibilitatea obținerii unui punctaj destul de redus (nu mai mult de 30% din punctaj) [1,2]. De obicei, problemele de combinatorică se reduc la prelucrarea elementelor unei mulțimi, inclusiv generarea unei mulțimii/submulțimii, căutarea unui subset sau element al mulțimii cu anumite proprietăți etc. [3].

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

Deseori, pentru rezolvarea unei probleme este necesar de a aplica diverse proprietăți ale numerelor întregi. Dintre cele mai des întâlnite proprietăți sunt: număr prim/compus, paritatea numărului, divizorii unui număr, număr perfect, număr palindrom, pătrat perfect, număr cubic, numere ilustre (Fibonacci, Armstrong, Catalan, Lucas, Mersenne, Stirling (de speța I și speța a II), Bell, Narayana etc.). Probleme legate de verificarea și demonstrarea diverselor proprietăți ale numerelor sunt parte componentă a Teoriei numerelor, constituind un domeniu de cercetare pentru mulți matematicieni și filosofi. Rezolvarea problemelor din viața cotidiană se reduce, în multe cazuri, la aplicarea proprietăților numerelor. Proprietățile numerelor întregi joacă un rol important în rezolvarea problemelor din cadrul concursurilor de programare. Un aspect aparte a studierii proprietăților unui număr ține de combinatorică. Astfel, numerele lui Stirling de speța I și speța a II, numerele lui Bell țin de așa noțiuni ca: mulțime, submulțime, partițiile unei mulțimi, permutare, permutare de ordinul n cu k cicluri, Triunghiului lui Bell; numerele Catalan, numerele lui Narayana implică noțiunile de: combinări din n elemente luate câte k, permutări cu repetiție etc.

Autorii propun cititorilor algoritmi C++ [4,5,6] și MAPLE [7] care implementează câteva proprietăți ale numerelor întregi, și anume, numerele ilustre Stirling, Bell, Catalan, Narayana.

2. Numerele lui Stirling de speța I și speța a II

Definiția 1. Fie mulțimea finită $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Vom numi partiție a mulțimii M o familie de submulțimi $M_1, M_2, \dots, M_s$ care satisfac proprietățile:

1. $M_i \subseteq M, \forall i = \overline{1,s}$;
2. $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_s = M$;
3. $M_i \cap M_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$.

Numărul de partiții format din k, $k = \overline{1,n}$ submulțimi ale mulțimii M reprezintă numărul lui Stirling de speța a II. Formula de recurență pentru calcularea numelor Stirling de speța a II:

$$S(n,k) = \begin{cases} 1, n = 0, k = 0 \\ 0, n = 0, k > 0 \\ 0, n > 0, k = 0 \\ S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) \end{cases}$$

O soluție C++ de calculare a numerelor lui Stirling de speța a II ar fi:

```
#include <iostream>
using namespace std;
int Stirling_II(int n, int k){
     if ((n==0)&&(k==0)) return 1;
```

```
     else
          if ((n==0)&&(k>0)) return 0;
          else
               if ((n>0)&&(k==0)) return 0;
               else
               return
                Stirling_II(n-1,k-1)+k*Stirling_II(n-1,k);
}
int main() {
     int n, k;
      cout<<"n=";
      cin>>n;
      cout<<"k=";
      cin>>k;
      cout << "Stirling_II("<<n<<","<<k<<")=";
      cout<<Stirling_II(n,k)<<endl<<endl;
     return 0;
}
```

Soluția pentru n=5 și k=3 este `Stirling_II(5,3)=25`.

Soft-ul MAPLE conține funcția *Stirling2*(n,k). Aplicarea acestei funcții pentru aceleași date inițiale este:

$$n := 5:$$

$$k := 3:$$

$$print(\text{`}Stirling_II(\text{`}, n, k, \text{`})=\text{`}, \text{stirling2}(n, k))$$

$$Stirling_II(, 5, 3,)=, 25$$

Numerele lui Stirling de speța I, $s(n,m)$, cu semn, se definesc ca fiind coeficienții polinomului $x(x-1)\dots(x-n-1)=\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\cdot x^k=(x)_n$, unde $(x)_n$ se numește simbolul Pochhammer, care este factorialul descrescător al lui x cu n factori.

Numerele lui Stirling de speța I, fără semn, indică câte permutări de ordinul n cu k cicluri există și se notează $c(n,k)$ sau $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$: $c(n,k)=|s(n,k)|=(-1)^{n-k}s(n,k)$. Sau: $\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\cdot x^k=x(x+1)\dots(x+n-1)=x^{\bar{n}}$, care reprezintă factorialul crescător a lui x cu n factori.

Formula de recurență pentru calcularea numelor Stirling de speța a I este:

$$s(n,k) = \begin{cases} 1, n = 0, k = 0 \\ 0, n = 0, k > 0 \\ 0, n > 0, k = 0 \\ s(n-1,k-1) + (n-1) \cdot s(n-1,k), \text{fără semn} \\ s(n-1,k-1) - (n-1) \cdot s(n-1,k), \text{cu semn} \end{cases}$$

Prezentăm în continuare o variantă de implementare în limbajul C++ a formulei de recurență de mai sus:

```
#include <iostream>
using namespace std;
int Stirling_I(int n, int k){
     if ((n==0)&&(k==0)) return 1;
     else
          if ((n==0)&&(k>0)) return 0;
          else
               if ((n>0)&&(k==0)) return 0;
               else
               return
               Stirling_I(n-1,k-1)+(n-1)*Stirling_I(n-1,k);
}
int main() {
     int n, k;
     cout<<"n=";
     cin>>n;
     cout<<"k=";
     cin>>k;
     cout << "Stiling_I("<<n<<","<<k<<")=";
     cout<<Stirling_I(n,k) <<endl<<endl<<endl;
     return 0;
}
```

Calcularea numerelor lui Stirling de speța I cu ajutorul programului de mai sus pentru n=5 și k=3 ne furnizează soluția `Stirling_I(5,3)=35`.

Soluția MAPLE în acest caz va fi:

$$n := 5 :$$

$$k := 3 :$$

$$print(\text{`}Stirling_I(\text{`}, n, k, \text{`})=\text{`}, \text{stirling1}(n, k))$$

$$Stirling_I(, 5, 3,)=, 35$$

unde stirling1(n, k) este o funcție încorporată în soft-ul MAPLE.

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

Numerele lui Stirling de speța I și speța a II sunt pe larg aplicate în rezolvarea problemelor de concurs la informatică (vezi https://infoarena.ro).

3. Numerele lui Bell

Numărul de modalități prin care putem partiționa o mulțime formată din n elemente reprezintă numerele Bell, care se notează cu B_n. Altfel spus, numerele lui Bell calculează toate partițiile posibile ale unei mulțimi. Calcularea numerelor Bell poate fi efectuată elementar prin utilizarea numerelor lui Stirling: $B_n = S(n,0) + S(n,1) + \cdots + S(n,n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$, unde $S(n,i), i = \overline{1,n}, n \in N$ sunt numere Stirling de speța a II , iar $B_0 = 1, B_1 = 1$.

O Soluție C++ poate fi:

```
#include <iostream>
using namespace std;
int Stirling_II(int n, int k){
     if ((n==0)&&(k==0)) return 1;
     else
          if ((n==0)&&(k>0)) return 0;
          else
               if ((n>0)&&(k==0)) return 0;
               else
               return
               Stirling_II(n-1,k-1)+k*Stirling_II(n-1,k);
}
int main() {
     int n, i, Bell=2;
     int stir[10][10];
     cout<<"n=";
     cin>>n;
     for(i=2;i<n;i++)
          Bell+=Stirling_II(n,i);
     cout<<"Bell("<<n<<")="<<Bell<<endl<<endl;
     return 0;
}
```

Soluția furnizată de program pentru n=4 este `Bell(4)=15`.

Aplicarea funcției Bell(n) în MAPLE furnizează soluția:

$$n := 4:$$

print(`*Bell*(`, *n*, `)=`, *bell*(*n*))

Bell(, 4,)=, 15

Numerele Bell por fi calculate aplicând următoarea formulă de recurență:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} B_k, \text{ cu cazul elementar } B_0 = 1.$$

În ambele cazuri complexitatea algoritmului va fi $O(n^2)$.

Notă. Deoarece numărul de apeluri ale funcțiilor *comb*(*n,k*) și *Bell*(*n*) este foarte mare pentru un număr *n* nu atât de mare, atunci timpul de calcul pentru algoritmul elaborat, la fel, va fi destul de mare.

Implementarea formulei de recurență pentru calcularea numerelor Bell în limbajul C++ este:

```
#include<iostream>
using namespace std;
int n,k;
long comb(int n,int k){
     if ((k==0)||(k==n)) return 1;
          else return comb(n-1,k)+comb(n-1,k-1);
}
long long Bell(int n){
     int k; long long s;
     if (n==0) return 1;
     else
          {s=0;
          for(k=0;k<n;k++)
               s+=comb(n-1,k)*Bell(k);
          return s;
          }
}
main (){
     int i,n;
     cout<<"n="; cin>>n;
     for(i=0;i<n;i++)
          cout<<"Bell("<<i<<")="<<Bell(i)<<endl;
     cout<<endl<<endl;
}
```

Soluția obținută în baza programului de mai sus va fi:

```
n=5
```

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

```
Bell(0)=1
Bell(1)=1
Bell(2)=2
Bell(3)=5
Bell(4)=15
```

În acest caz, soluția MAPLE poate fi:

$$a := \text{`Bell(`}:$$

$$b := \text{`)=`}:$$

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 0 \textbf{ to } 4 \textbf{ do } print(a, i, b, bell(i)) \quad \textbf{end do};$$

$$Bell(, 0,)=, 1$$

$$Bell(, 1,)=, 1$$

$$Bell(, 2,)=, 2$$

$$Bell(, 3,)=, 5$$

$$Bell(, 4,)=, 15$$

MAPLE conține comenzi complexe, așa ca instrucțiunea *seq*(), care permite construirea și afișarea unei secvențe de valori. Apelul tipic al instrucțiunii *seq(f(i),i=1..n)* generează secvența de valori ale funcției *f()* pentru argumentul *i* de la 1 la *n*: *f(1), f(2), ..., f(n)*. Prin urmare, pentru a genera primele 5 numere *Bell* se va apela instrucțiunea:

$$seq(bell(i), i = 0..4)$$

$$1, 1, 2, 5, 15$$

Este cunoscut că, numărul total de partiții ale unei mulțimi cu *n* elemente este numărul lui *Bell*(*n*). Codul de program în C++, afișat mai jos, generează toate partițiile unei mulțimi de *n* elemente:

```
#include <iostream.h>
int s[100],nr_e,count,Bell=0;
void tipar_part() {
int i,j;
     Bell++;
     cout<<"Partitia "<<Bell<<":\t";
     for(i=1;i<=count;i++){
          cout<<"{";
          for(j=1;j<=nr_e;j++)
               if(s[j]==i)cout<<j<<' ';
          cout<<"} ";
     }
     cout<<endl<<endl;
}
```

```
void partitii(int k) {
int i;
     if(k==nr_e+1)
          tipar_part();
     else {
          for(i=1;i<=count;i++){
               s[k]=i;
               partitii(k+1);
               }
     count++;
     s[k]=count;
     partitii(k+1);
     count--;
     }
}
int main() {
     cout<<"Introduceti numarul de elemente ale multimii: ";
     cin>>nr_e;
     cout<<endl;
     partitii(1);
     cout<<endl<<endl;
}
```

Soluția furnizată de program este:

```
Introduceti numarul de elemente ale multimii: 4
Partitia 1: {1,2,3,4}
Partitia 2: {1,2,3} {4}
Partitia 3: {1,2,4} {3}
Partitia 4: {1,2} {3,4}
Partitia 5: {1,2} [3} {4}
Partitia 6: {1,3,4} {2}
Partitia 7: {1,3} {2,4}
Partitia 8: {1,3} {2} {4}
Partitia 9: {1,4} {2,3}
Partitia 10: {1} {2,3,4}
Partitia 11: {1} {2,3} {4}
Partitia 12: {1,4} {2} {3}
Partitia 13: {1} {2,4} {3}
```

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

```
Partitia 14: {1} {2} {3,4}
Partitia 15: {1} {2} {3} {4}
```

Deoarece *Bell*(4)=15, s-au obținut 15 partiții ale unei mulțimi de 4 elemente.

În MAPLE, pentru a genera partițiile unei mulțimi, se va utiliza funcția *SetPartitions()* din pachetul *Iterator*. Soluția se afișează sub formă de șiruri de lungime restricționată în ordine lexicografică crescătoare. Conversia din aceste șiruri în partiții reale se va face cu ajutorul metodei *ToSets()*.

```
> M := SetPartitions(4) : i := 1 :
  for V in SetPartitions(4) do
      printf("Partitia %d:\n", i) :
      printf("%a\n", M:-ToSets(V)) :
      i++:
> end do
```

Partitia 1: [{1, 2, 3, 4}]

$i := 2$

Partitia 2: [{1, 2, 3}, {4}]

$i := 3$

Partitia 3: [{1, 2, 4}, {3}]

$i := 4$

Partitia 4: [{1, 2}, {3, 4}]

$i := 5$

Partitia 5: [{1, 2}, {3}, {4}]

$i := 6$

Partitia 6: [{1, 3, 4}, {2}]

$i := 7$

Partitia 7: [{1, 3}, {2, 4}]

$i := 8$

Partitia 8: [{1, 3}, {2}, {4}]

$i := 9$

Partitia 9: [{1, 4}, {2, 3}]

$i := 10$

Partitia 10: [{1}, {2, 3, 4}]

$i := 11$

Partitia 11: [{1}, {2, 3}, {4}]

$i := 12$

Partitia 12: [{1, 4}, {2}, {3}]

$i := 13$

Partitia 13: [{1}, {2, 4}, {3}]

$i := 14$

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

Partitia 14: [{1}, {2}, {3, 4}]

$i := 15$

Partitia 15: [{1}, {2}, {3}, {4}]

Numerele lui Bell pot fi obținute prin construirea Triunghiului lui Bell. În acest scop se va utiliza un tablou bidimensional Bell[i][j] și se va aplica algoritmul:

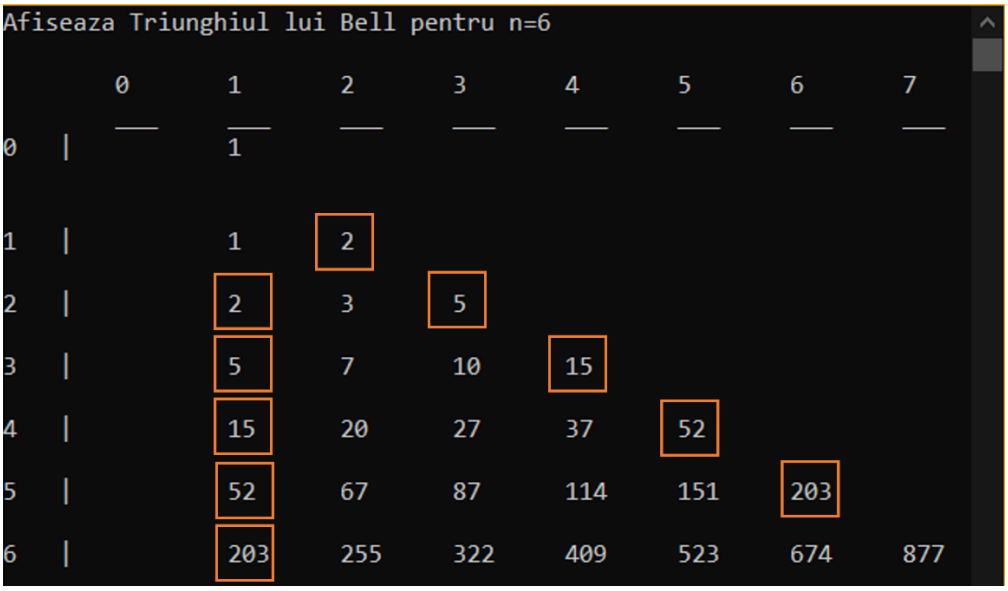
1. Bell[0][1]=1;
2. Bell[i][1]=Bell[i-1][i]; i=1,2,…,n;
3. Bell[i][j]=Bell[i][j-1]+Bell[i-1][j-1],i=1,2,…,n; j=2,3,…,i+1;
4. coloana 1 a tabloului Bell reprezintă șirul de numere Bell(i),i=0,1,2,…,n.

Construirea Triunghiului lui Bell poate fi realizată prin codul de program C++:

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main() {
    long Bell[50][50];
    int i,j,n;
     cout<<"Afiseaza Triunghiul lui Bell pentru n=";
     cin>>n;
     cout<<endl;
     cout<<"\t";
     for(i=0;i<=n+1;i++)
          cout<<i<<"\t";
     cout<<endl;
     for(i=0;i<=n+1;i++)
          cout<<"\t___";
     cout<<endl;
     for(i=0;i<=n;i++)
          for(j=0;j<=n+1;j++)
               Bell[i][j]=0;
     Bell[0][1]=1;
     for(i=1;i<=n;i++)
          for(j=1;j<=i+1;j++)
               if (j==1) Bell[i][j]=Bell[i-1][i];
               else
               Bell[i][j]=Bell[i-1][j-1]+Bell[i][j-1];
     for(i=0;i<=n;i++){
          cout<<i<<"   |";
          for(j=0;j<=n+1;j++)
```

```
                if(Bell[i][j]==0)cout<<"\t\t";
                     else
                          cout<<Bell[i][j]<<"\t";
          cout<<endl<<endl;
          }
     cout<<endl<<endl;
     return 0;
}
```

Soluția obținută este:



```
Afiseaza Triunghiul lui Bell pentru n=6

        0       1       2       3       4       5       6       7
        ___     ___     ___     ___     ___     ___     ___     ___
0   |           1

1   |           1       2
2   |           2       3       5
3   |           5       7       10      15
4   |           15      20      27      37      52
5   |           52      67      87      114     151     203
6   |           203     255     322     409     523     674     877
```

În MAPLE acest lucru poate fi realizat cu ajutorul codului:

$n := 6:$

$Bell := Matrix(n+1):$

$Bell[1, 1] := 1:$

for i **from** 2 **to** $n+1$ **do**
  for j **from** 1 **to** i **do**
    if $(j = 1)$ **then** $Bell[i, j] := Bell[i-1, i-1]$
      else
        $Bell[i, j] := Bell[i-1, j-1] + Bell[i, j-1]$
    end if
  end do
end do:

for i **from** 1 **to** $n+1$ **do**
  for j **from** 1 **to** $n+1$ **do**
    if $(Bell[i, j] \neq 0)$ **then** $printf$("%5d", $Bell[i, j]$) **end if**:
  end do:
  $printf$("\n")
end do;

1						
1	2					
2	3	5				
5	7	10	15			
15	20	27	37	52		
52	67	87	114	151	203	
203	255	322	409	523	674	877

4. Numerele Catalan

Formula de calcul pentru numerele lui Catalan, aplicând combinările, este:

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n, \text{ pentru } n \geq 0.$$

Recursiv, șirul de numere Catalan poate fi calculat aplicând formula

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}.$$

Aplicabilitatea numerelor Catalan poate fi consultată din sursa bibliografică [8]. Programul în limbajul C++ pentru calcularea numerelor lui Catalan este afișat mai jos.

```
#include<iostream>
using namespace std;
int n,k;
long comb(int n,int k){
     if ((k==0)||(k==n)) return 1;
          else return comb(n-1,k)+comb(n-1,k-1);
}
long Catalan(int n){
     return comb(2*n,n)/(n+1);
}
main (){
     int i;
     cout<<"n=";
     cin>>n;
     for(i=0;i<=n;i++)
          cout<<"Catalan("<<i<<")="<<Catalan(i)<<endl;
     cout<<endl<<endl;
}
```

Pentru n=10 se obține următorul șir de numere Catalan:

```
Catalan(0)=1
Catalan(1)=1
Catalan(2)=2
Catalan(3)=5
```

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

```
Catalan(4)=14
Catalan(5)=42
Catalan(6)=132
Catalan(7)=429
Catalan(8)=1430
Catalan(9)=4862
Catalan(10)=16796
```

Cu toate că nu conține funcții speciale pentru a calcula și afișa numerele Catalan, MAPLE permite elaborarea de proceduri, inclusiv recursive, care ar realiza acest lucru. În exemplul de mai jos s-a elaborat procedura *catalan*, apoi s-a afișat secvența de numere Catalan de la 0 la 10.

```
n := 10 :
catalan := proc(k :: nonnegint)
option remember;
 local i;
   add(thisproc(i) * thisproc(k − 1 − i), i = 0 ..k − 1)
end proc:
catalan(0) := 1 :
printf("n=%d\n", n) :
for i from 0 to 10 do
      printf("Catalan(%d)=%d\n", i, catalan(i))
end do;
```

Soluția furnizată de programul MAPLE este:

```
n=10
Catalan(0)=1
Catalan(1)=1
Catalan(2)=2
Catalan(3)=5
Catalan(4)=14
Catalan(5)=42
Catalan(6)=132
Catalan(7)=429
Catalan(8)=1430
Catalan(9)=4862
Catalan(10)=16796
```

5. Numerele Narayana

Una din aplicațiile numerelor Catalan este calcularea numărului de profiluri montane distincte, care se pot construi cu ajutorul a n caractere ”/” și n caractere ”\” fără a coborî ”sub nivelul mării”. De exemplu, pentru n=3 se pot construi 5 profiluri montane care satisfac condițiilor anunțate. Aplicarea numerelor Narayana ne permite să calculăm câte profiluri montane cu exact k vârfuri (un vârf este o pereche /\) putem construi cu ajutorul a n caractere ”/” și n caractere ”\” fără a coborî ”sub nivelul mării”.

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

Formula de calcul pentru numerele Narayana este: $N(n,k) = \frac{1}{n} C_n^k C_n^{k-1} = \frac{1}{k} C_n^{k-1} C_{n-1}^{k-1}$, unde $N(0,0) = 1, N(n,0) = 0, N(n,1) = 1$ pentru $n \geq 1$.

Este adevărată relația: $C_n = \sum_{k=0}^{n} N(n,k)$. Informații suplimentare pot fi culese din sursa bibliografică [9].

Concluzii

Așa dar:

1. Numerele Stirling se speța I pot fi aplicate la rezolvarea problemelor de genul: cum pot fi conectate între ele *n* blocuri/edificii utilizând *k* drumuri cu sens unic; în câte moduri pot fi aranjate *n* persoane la *k* mese rotunde identice astfel încât nici o masă să nu rămână neocupată. Generalizând, numerele lui Stirling de speța I se aplică pentru a calcula în câte moduri poate fi împărțită o mulțime din *n* elemente în *k* submulțimi nevide disjuncte, ordinea elementelor în submulțime nu este esențială.
2. O serie de probleme care se reduc la calcularea numerelor Stirling de speța II sunt: calcularea numărului de modalități de partiționare a unei mulțimi din *n* elemente în *k* submulțimi, unde fiecare submulțime conține cel puțin *m* elemente; calcularea numărului de modalități de partiționare a șirului de numere întregi 1, 2, ..., *n* în *k* submulțimi nevide, astfel încât distanța dintre orice pereche de numere a unei submulțimi să nu fie mai mică decât *q*, adică pentru orice numere întregi *x* și *y* dintr-o submulțime se va satisface relația $|x - y| \geq q$.
3. Numerele Bell se aplică pentru a calcula: numărul posibil de rezultate ale unei curse de cai, rezultatele posibilele ale unei curse de alegare cu mai mulți sportivi, numărul de coduri de lungime *n* pentru un safeu bazat pe apăsarea simultană a unei combinații de taste, numărul de scheme de rimă într-o poezie de *n* versuri/linii etc.
4. Numerele lui Catalan, prin definiție, permit calcularea numărului de cuvinte Dyck care pot fi obținute din *n* elemente α și *n* elemente β. La calcularea numărului de cuvinte Dyck se reduc așa probleme ca: șiruri corect parantezate, crearea șirurilor cu anumite proprietăți (toate subșirurile trebuie să conțină un număr de simboluri α mai mare sau egal decât numărul de simboluri β), construirea reliefului muntos, triangularea unui poligon cu *n*+2 laturi, numărul de drumuri laticeale cu anumite proprietăți, acoperirea unei scări cu *n* trepte folosind *n* dreptunghiuri etc.
5. Numerele Narayana reprezintă o descompunere a numerelor Catalan astfel încât, pentru $n \geq 0$ are loc relația: $C_n = \sum_{k=0}^{n} N(n,k)$. La calcularea Numerelor Narayana se reduc așa probleme ca: construirea reliefului muntos cu exact *k* vârfuri; acoperirea unei scări cu *n* trepte folosind *n* dreptunghiuri, unde o latură a dreptunghiului coincide cu înălțimea unei trepte; parantezarea unei expresii formată din *n*+1 operanzi, unde *k* operanzi consecutivi nu respectă legea asociativă etc.

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. GLOBA, A.; CORLAT, S. Didactic aspects regarding to creating test sets for competition problems. În: *Acta et Commentationes. Științe ale Educației. Revistă științifică* Nr.4(18) (2019). Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2019. p. 73-85. ISSN 1857-0623, E-ISSN 2587-3636.
2. GLOBA, A. Abordări metodice privind implementarea unor tehnici de programare prin prisma complexităţii algoritmilor. În: *Acta et Commentationes. Științe ale Educației. Revistă științifică* Nr.1(4) (2014). Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2014. p.41-49. ISSN 1857-0623.
3. GROZA, G. *Analiza combinatorică și algoritmica grafurilor*. Universitatea Tehnică de Construcții din București: Editura Conspress, 2015. 162 p. ISBN 978-973-100-377-1.
4. CERCHEZ, E.; ȘERBAN, M. *Programarea în limbajul C/C++ pentru liceu*. Vol I. București: Editura Polirom, 2021. 336p. ISBN 973-681-868-3.
5. CIOBAN, M.; PAVEL, D.; PAVEL, M. *Limbajul de programare C. Suport de curs la disciplina Programare în limbaje de nivel mediu*. Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2016. 202 p. ISBN 978-9975-76-187-1.
6. PAVEL, M.; PAVEL, D. Aspecte didactice privind studierea temei „Pointeri în C". În: *materialele conferinței The 20TH Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu*, (CAIM-2012), August 22-25, ISBN 978-9975-76-091-1. August 22-25, Chişinău 2012. p.198.
7. Softul MAPLE: https://www.maplesoft.com/products/Maple/students
8. https://www.pbinfo.ro/articole/18941/elemente-de-combinatorica
9. http://campion.edu.ro/arhiva/www/arhiva_2009/papers/paper20.pdf

© Globa Angela, Pavel Maria, Pavel Dorin, 2022

CZU: 37.01:378.12

ȘCOALA ȘTIINȚIFICĂ „TEORIA ȘI METODOLOGIA INSTRUIRII (ȘTIINȚE EXACTE ȘI ALE NATURII)" ȘI ROLUL EI ÎN PREGĂTIREA CADRELOR ȘTIINȚIFICE DE ÎNALTĂ CALIFICARE

Ilie LUPU
e-mail: lupu.ilie@ust.md

Rezumat. În lucrare este descrisă structura școlii științifice „Teoria și Metodologia Instruirii (științe exacte și ale naturii)" din cadrul Universității de Stat din Tiraspol, cât și istoria fondării și dezvoltării. Totodată sunt evidențiate direcțiile principale de cercetare din cadrul școlii științifice și menționat aportul cercetătorilor și profesorilor universității în formarea cadrelor de înaltă calificare.
Cuvinte cheie: școala științifică, științe exacte și ale naturii, cercetare științifică, Seminar Științific de Profil, Consiliul Științific Specializat.

Abstract. The paper describes the structure of the scientific school "Theory and Methodology of Training (exact and natural sciences)" within the State University of Tiraspol, as well as the history of its foundation and development. At the same time, the main research directions within the scientific school are highlighted and the contribution of university researchers and professors in the training of highly qualified personnel is mentioned.
Keywords: scientific school, exact and natural sciences, scientific research, Profile Scientific Seminar, Specialized Scientific Council.

Capitalul uman calificat este produsul cel mai solicitat în societatea și economia modernă, care, fiind bazate pe cunoaștere și inovare, pot fi funcționale doar având specialiști ce ar dispune de cunoștințe, competențe și abilități operaționale. Deși cunoștințele și competențele din domeniul științei au natură specifică, ele se dovedesc a fi foarte utile în cele mai diverse sectoare de activitate. Vorba e că toate problemele care apar în fața omenirii sunt dictate de Necunoscut și Situații nestandarde. Rezolvarea acestor probleme netradiționale necesită oameni cu gândire de cercetător. Sarcina societății e de a-i aduce pe cei mai talentați reprezentanți ai săi, într-un interval de timp cât mai scurt posibil (fără popasuri inutile), la hotarul dintre Cunoscut și Necunoscut și a-i pune să dobândească noi cunoștințe și tehnologii pentru soluționarea problemelor apărute. Se impune flexibilitatea învățământului și capacitatea lui de adaptare la condițiile în schimbare continuă, precum și de autoorganizare cu menținerea funcționalității eficiente. Crearea de noi cunoștințe și tehnologii poate fi atinsă numai prin instruirea viitorilor cercetători. Știința poate să-și realizeze funcțiile doar când există un aflux permanent de cadre: funcționarea normală a instituțiilor de cercetare li de învățământ superior este posibilă exclusiv în cazul reînnoirii perpetue a potențialului științific uman. Modalitățile care asigură afluxul continuu de cadre științifice sunt studiile prin doctorat și activitățile de cercetare, legate de pregătirea tezei de doctorat.

© Lupu Ilie, 2022

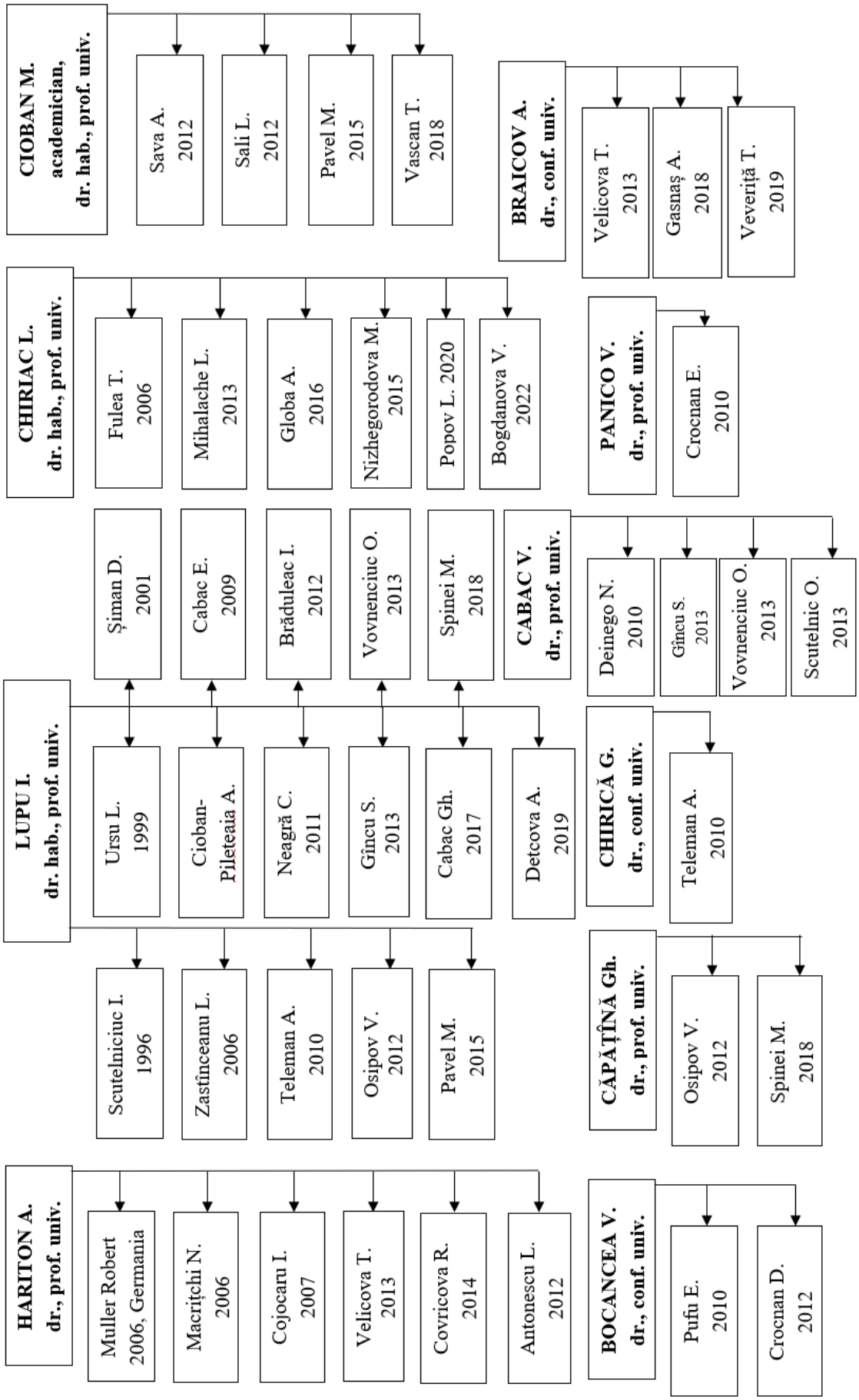


Figura 1. Școala științifică *Teoria și metodologia instruirii (științe reale), fondator Ilie Lupu, dr. habilitat în științe pedagogice (didactica matematicii), profesor universitar*

Școala științifică „Teoria și metodologia instruirii” de la Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău) este unica prin valoare și pondere atât în Republica Moldova cât și în Europa de Sud-Est. Elementul distinct al acestei comunități academice este specializarea în diferite domenii ale didacticii, în mod deosebit în didacticele științelor exacte și ale naturii (matematică, fizică, informatică, chimie, biologie, geografie).

Datorită recunoașterii naționale și internaționale a valorii școlii științifice în domeniul didacticii, Universitatea de Stat din Tiraspol a fost instituția abilitată cu dreptul de a organiza studii doctorale, a constitui unicul seminar științific de Profil și Consiliul Științific Specializat în domeniul didacticii științelor exacte și ale naturii în Republica Moldova

S-au inclus activ în activitatea Școlii Științifice, fiind conducători științifici la tezele de doctor în științe pedagogice următorii profesori: Cioban Mitrofan, dr. hab., prof. univ., academician al AȘM; Chiriac Liubomir, dr. hab., prof. univ.; Hariton Andrei, dr. prof. univ.; Braicov Andrei, dr. conf. univ.; Bocancea Viorel, dr. conf. univ.; Cabac Valeriu, dr. prof. univ.; Gremalschi Anatol, dr. hab., prof. univ.; Panico Vasile, dr., prof. univ.;

Voi menționa direcțiile principale, în care au fost efectuate cercetări științifice de către savanții din cadrul Școlii științifice și discipolii lor.

Primul ciclu de lucrări științifice este consacrat problemelor actuale ale didacticii matematicii, și anume [1, 2]: Evaluarea dificultății și complicației rezolvării problemelor de matematică (Scutelniciuc I.); Formarea conceptelor geometrice la elevii de vârstă școlară mică (Ursu L.); Eficientizarea studierii matematicii școlare prin intermediul metodelor activ-participative (Braduleac L.); Metodologia studierii matematicii în instituțiile cu profil tehnic prin intermediul noilor tehnologii informaționale (Osipov V.); Influența factorilor contextuali asupra randamentului elevilor la matematică (Cabac E.); Metodologia studierii elementelor de geometrie analitică prin intermediul calculatorului (Zastînceanu L.); Научно-теоретические основы изучения курса математики в гимназии (Cioban-Pileţkaia A.); Dezvoltarea deprinderilor de lucru independent al studenților prin mijloacele învățământului electronic mixt (prezențial-distanță (Vovnenciuc O.); Metodologia formării și dezvoltării competențelor studenților în sistemul computerizat de instruire (la disciplina „Inteligența artificială” (Spinei M.); Impactul matematicii în însușirea disciplinelor profesionale în sistemul învățământului secundar profesional (Detcova A.); Corelația optimală dintre intuitiv și logic în predarea-învățarea-evaluarea temei „Paralelism și perpendicularitate în spațiu” (Macrițchi N.); Elemente de teorie a mulțimilor în cursul preuniversitar de matematică în Germania (Müller-Fonfara R.); Dezvoltarea percepției vizuale la studenți în procesul studierii disciplinelor grafice (Raileanu V.); Învățământul matematic în Moldova: secolul XV-XX (Aspect didactic) (Cojocaru I.); Formarea diferențiată a competențelor de rezolvare a problemelor la elevii cl. I-IV (Rusuleac T.); Rolul cursurilor opționale în eficientizarea procesului de predare-învățare a fizicii în învățământul preuniversitar (Pufu E., România); Evaluarea însușirii

© Lupu Ilie, 2022

eronate de către liceeni a conceptelor biologice (Crocnan E., România); Formarea competenței de explorare/investigare a proceselor ecologice (biologice) la elevii claselor primare (Teleman A.), Metodologia promovării culturii tehnice elementare în clasele primare (Guțalov L.); Rolul reprezentărilor grafice în eficientizarea studierii matematicii (Sava A., România); Impactul opționalului de fizică în structura curriculară interdisciplinară (Crocnan D., România); Metodologia studierii elementelor de teoria probabilităților și statistică matematică în gimnaziu și liceu (Antonescu L., România); Formarea competenței ecologice la studenți în procesul predării-învățării chimiei (Calmuțchi L.); Abordarea sistemică a procesului de pregătire a cadrelor didactice pentru activitatea extracurriculară la matematică (Săli L.); Dezvoltarea aptitudinilor creative ale studenților în procesul predării tehnologice (Rotari E.); Metodologia rezolvării problemelor economico-matematice în gimnaziu și liceu (Covricova R.); Metodologia de formare inițială a competențelor profesionale ale studentului chimist în context interdisciplinar (Codreanu S.);

Al doilea ciclu de cercetări este consacrat teoriei și metodologiei instruirii informaticii (didactica informaticii) și anume: Strategii didactice în formarea profesorilor de informatică, tehnologia informației și a comunicațiilor (Negara C.); Formarea și dezvoltarea competenței de programare orientată pe obiecte la viitorii profesori de informatică (Gîncu S.); Impactul Tehnologiilor Informaționale și de comunicație în formarea învățătorilor (Pavel M.); Individualizarea formării universitare prin trasee individuale de învățate (Cabac G.); Tehnologii informaționale în procesul de predare-învățare a informaticii (Fulea T.); Testarea adaptativă ca factor de optimizare a procesului de instruire în învățământul universitar (Deinego N.); Fundamente metodologice ale formării inițiale ale profesorilor de informatică (Chirchina O.); Valențe metodologice ale instruirii asistate de calculator în învățământul superior (Croitoru-Chiriac T.); Diferențierea instruirii studenților în procesul studierii disciplinelor informatice la facultate (Scutelnic O.); Abordări metodice privind aplicarea complexă a tehnologiilor computaționale în procesul de predare-învățare a compartimentului „Modelare și metode de calcul” în cursul liceal de informatică (Mihalache L.); Utilizarea noilor tehnologii informaționale în procesul de evaluare la informatică (Velicov T.); Evaluarea integrată a nivelului de pregătire profesională a studenților din domeniul „Informatica și tehnica de calcul” (Pomian S.); Eficientizarea procesului de predare-învățare a grupului de discipline „Tehnologiile rețelelor de calculatoare prin utilizarea modelului integrat de evaluare (Nizhegorodova M.); Metodologia dezvoltării competenței digitale în procesul formării inițiale a cadrelor didactice filologi (Veverița T.); Abordări metodice privind implementarea noilor tehnologii informaționale în procesul de studierea disciplinei universitare „Tehnici de programare” (Globa A.); Formarea şi dezvoltarea competențelor digitale la studenţii din domeniul socio-juridic prin utilizarea tehnologiilor interactive

© Lupu Ilie, 2022

(Popov L.); Metodologia studierii în învățământul superior a tehnologiilor de protecție și securitate a informației (Bogdanova V.).

Rezultatele cercetărilor în cadrul școlii științifice „Teoria și metodologia instruirii", sunt publicate în 10 monografii și într-un număr impunător de articole, care s-au bucurat de o înaltă apreciere din partea specialiștilor.

Tezele de doctor în științe pedagogice, susținute în cadrul Consiliului Științific specializat au participat la concursul național „Teza de excelență de doctor" în domeniul științe socio-umane.

În anul 2011 teza doamnei Negara Corina „Strategii didactice în formarea profesorilor de informatică, tehnologia informației și a comunicațiilor" a ocupat locul întâi, fiind menționată cu Diplomă Gradul 1 de laureat al Concursului național Teza de excelență de doctor a anului 2011.

În 2016 teza de doctor în științe pedagogice a dnei Globa Angela „Abordări metodice privind implementarea noilor tehnologii informaționale în procesul de studierea disciplinei universitare „Tehnici de programare" a ocupat locul 2, fiind menționată cu Diplomă de Gradul 2 de laureat al Concursului național 2016 Teza de excelență de doctor a anului 2016.

În 2020 teza de doctor în științe pedagogice a domnului Codreanu Sergiu „Metodologia de formare inițială a competențelor profesionale ale studentului chimist în context interdisciplinar" menționată cu Diplomă de laureat al Concursului Național „Teza de doctorat de excelență a anului 2020" și premiul „Virgil Mândâcanu" pentru teza de doctor de excelență de gradul I.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Biblografie

1. CIOBAN, Mitrofan. Matematica și informatica în Universitatea de Stat din Tiraspol. In: *Învăţământ superior: tradiţii, valori, perspective Științe Exacte și ale Naturii și Didactica Științelor Exacte și ale Naturii*. Vol. 1, 1-2 octombrie 2021, Chișinău. Chișinău, Republica Moldova: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2020, pp. 258-278. ISBN 978-9975-76-360-8.
2. http://www.cnaa.md/statistics/theses/

© Lupu Ilie, 2022

Communications in Education

CZU: 51:797.556

CONVERGENȚA SERIEI $\sum \frac{1}{n^2}$ ȘI APLICAȚIILE EI

Dorin AFANAS
UST, Catedra Algebră, Geometrie și Topologie
e-mail: afanasdde@gmail.com

Rezumat. În prezentul articol este cercetată la convergență seria $\sum \frac{1}{n^2}$ și sunt prezentate aplicațiile ei în fizică, fotografiere, filmare și pilotarea dronelor.
Uneori, când vorbim despre drone și programare, se iscă întrebarea dacă sunt necesare cunoștințe din matematică sau nu. La unele persoane s-ar crea impresia că programarea unui vehicul aerian este o problemă destul de simplă. Putem cu certitudine să dezamăgim programatorii: pentru a programa astfel de aparate, doar matematica nu mai este suficientă. Cel puțin, vor fi necesare cunoașterea încă a două discipline – mecanica teoretică și dinamica, precum și teoria controlului automat. Desigur, dacă sunteți un utilizator simplu, atunci pentru a programa un zbor automat în conformitate cu un anumit program, puteți utiliza programe deja elaborate [1].
Însă dacă vorbim despre scrierea unor astfel de programe, nu despre utilizarea lor, atunci acest lucru va necesita cunoștințe fundamentale din diferite domenii. În primul rând trebuie să ne amintim de serii și ecuațiile diferențiale. Când se rezolvau asemenea probleme în cadrul disciplinei analiza matematică mereu apărea întrebarea: pentru ce? Iată și răspunsul: pentru a descrie și dirija zborul unui vehicul aerian fără pilot.
Cuvinte cheie: serie, convergență, funcție, limita, semnal radio, fotografiere, filmare, dronă.

Abstract. In this article, the $\sum \frac{1}{n^2}$ series convergence is researched and its applications in physics, photography, filming and drone piloting.
Sometimes, when we talk about drones and programming, the question arises whether knowledge of mathematics is needed or not. Some people would get the impression that scheduling an air vehicle is a fairly simple matter. We can certainly disappoint programmers: to program such devices, mathematics alone is no longer enough. At least, it will be necessary to know two more disciplines – theoretical mechanics and dynamics, as well as the theory of automatic control. Of course, if you are a simple user, then to schedule an automatic flight according to a certain program, you can use programs already developed [1].
But if we are talking about writing such programs, not about using them, then this will require basic knowledge in various fields. First of all we have to remember the series and the differential equations. When solving such problems in the discipline of mathematical analysis, the question always arose: for what? Here is the answer: to describe and direct the flight of an unmanned aerial vehicle.
Keywords: series, convergence, function, limit, radio signal, photography, filming, drone.

În sens algebric nu pot fi adunate o infinitate de numere reale. Pentru realizarea acestui scop s-a introdus noțiunea de *serie*, care reprezintă prin sine o generalizare a conceptului de *sumă finită de numere reale*. Acest concept se aplică unei mulțimi infinite ale cărei elemente sunt termenii unui șir.

© Afanas Dorin, 2022

Sunt cunoscute diferite aplicații ale seriilor numerice. În cadrul acestui articol vom prezenta aplicația seriei $\sum \frac{1}{n^2}$ în controlul zborului prin intermediul semnalelor radio a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord, în fotografiere și filmări realizate cu ajutorul unor asemenea vehicule aeriene.

Repere teoretice: studenții trebuie să posede următoarele cunoștințe și competențe din cadrul temelor: semnal radio, fotografiere, filmare, noțiune de funcție, limita funcției, sumă finită de numere reale, noțiune de serie numerică, sumă parțială a seriei numerice, suma seriei numerice, serie convergentă și divergentă.

Se începe activitatea cu enunțul criteriului de comparație al seriilor: *considerăm două serii*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{unde } 0 < a_n \leq b_n \text{ pentru orice } n \text{ natural.}$$

♦ *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, atunci și seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

♦ *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, atunci și seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Se demonstrează convergența seriei:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Într-adevăr,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots =$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots.$$

Observăm că suma parțială a seriei date este:

$$S_n = 2 - \frac{1}{n},$$

de unde trecând la limită obținem 2. Prin urmare, seria dată converge.

Se trece apoi la demonstrația convergenței seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Într-adevăr, aplicând criteriul de comparație al seriilor, obținem că:

$$1 \leq 1, \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \frac{1}{9} < \frac{1}{6}, \frac{1}{16} < \frac{1}{12}, \frac{1}{25} < \frac{1}{20}, \ldots, \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}.$$

Deoarece seria $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge, rezultă că și seria $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

© Afanas Dorin, 2022

Se explică studenților că există și alte metode de a demonstra convergența seriei $\sum \frac{1}{n^2}$. Una din aceste metode se bazează pe descompunerea funcției trigonometrice sin *x* în serie.

Într-adevăr, dezvoltarea funcției sin *x* în serie este:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots =$$
$$= x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \cdots\right).$$

Deci

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \cdots.$$

Pe de altă parte, Euler a stabilit că funcția sin *x* admite descompunerea:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots.$$

Prin urmare,

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots.$$

Egalitatea

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

are loc pentru orice *x* și deci coeficienții de pe lângă x^2 trebuie să fie egali, adică

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{25\pi^2} - \cdots$$

sau

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6}.$$

Prin urmare,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

adică suma seriei $\sum \frac{1}{n^2}$ este $\frac{\pi^2}{6}$.

Neapărat se menționează că seria dată ne reprezintă o sumă a pătratelor inverse, numită *legea pătratelor inverse* și că această sumă poate fi obținută și prin metode alternative precum descompunerea funcției $f(x) = x^2$ în seria Fourier.

În anul 1988 Roy D. North a calculat cu ajutorul unui computer suma a unui milion de termeni a seriei pătratelor inverse și a observat legitatea – a șasea cifră după virgulă, după cum și era de așteptat, este greșită (vezi tabelul de mai jos).

© Afanas Dorin, 2022

Suma seriei pătratelor inverse	1,64493**4**0668482264364724151666460251892189499 01...
Suma parțială a primilor un milion de termeni	1,6449330668487264363057484999793918558856165 44…
Eroarea	0.0000009999995000001666666666666333333333333357…

După explicația noțiunilor teoretice cadrul didactic va trece nemijlocit la prezentarea aplicațiilor legii pătratelor inverse.

Aplicația 1. În fizică, legea pătratelor inverse afirmă că *o anumită cantitate sau intensitate fizică este invers proporțională cu pătratul distanței față de sursa acelei cantități fizice*.

Matematic legea pătratelor inverse poate fi notată:

$$\textbf{intensitatea} \sim \textbf{1/distanța}^2 \ (I \sim 1/r^2),$$

unde cu I s-a notat intensitatea, iar cu r – distanța.

De asemenea, această lege poate fi exprimată matematic și astfel:

$$\textbf{intensitatea}_1/\textbf{intensitatea}_2 = (\textbf{distanța}_2)^2/(\textbf{distanța}_1)^2 \ (I_1/I_2 = r_2^2/r_1^2)$$

sau ca formularea unei cantități constante:

$$\textbf{intensitatea}_1 \times (\textbf{distanța}_1)^2 = \textbf{intensitatea}_2 \times (\textbf{distanța}_2)^2 \ (I_1 \times r_1^2 = I_2 \times r_2^2).$$

Geometric dependența dintre intensitatea radiației unei surse de lumină și distanța de la sursă este reprezentată în figura 1.

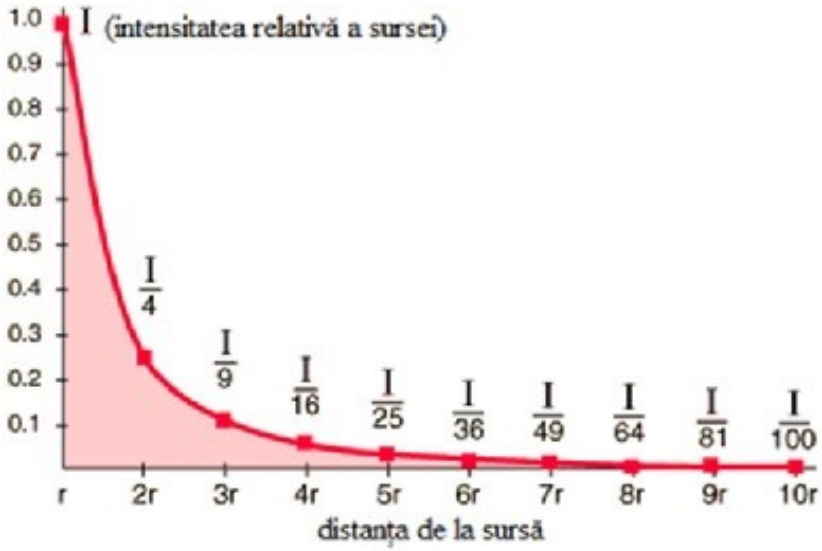


Figura 1. Dependența geometrică

În figura 2 punctul S reprezintă sursa de lumină, r – distanța de la sursa de lumină. Liniile reprezintă fluxul care iese din sursă. Numărul total de linii de flux depinde de intensitatea de radiație a sursei și este constant cu creșterea distanței, unde o densitate mai mare de flux de linii (liniile pe unitatea de suprafață) înseamnă un câmp mai puternic. Densitatea liniilor de flux este invers proporțională cu pătratul distanței față de sursă, deoarece suprafața unei sfere crește cu pătratul razei. Astfel puterea unui câmp este invers proporțională cu pătratul distanței față de sursă.

© Afanas Dorin, 2022

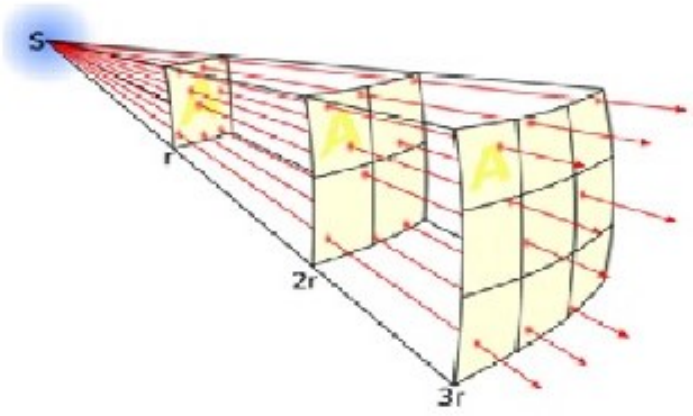


Figura 2. Fluxul sursei

Observăm că micșorarea intensității de radiație a sursei de la 1 *m* până la 10 *m* în procente cu exactitatea până la un număr întreg va arăta așa cum este reprezentat în figura 3.

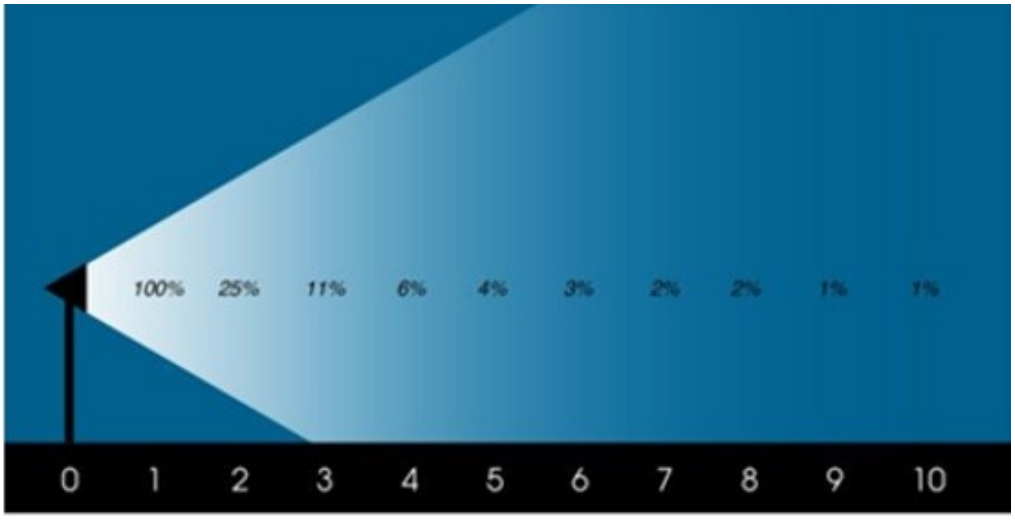


Figura 3. Micșorarea intensității de radiație

Observăm, că intensitatea de radiație a sursei (iluminarea) scade brusc cu 75% de la 1 *m* până la 2 *m*, iar mai apoi scade numai cu 5% de la 4 *m* până la 10 *m*.

Trebuie să reținem că conform legii pătratelor, pătratele numerelor cresc din ce în ce mai repede, iar conform legii pătratelor inverse ele se micșorează din ce în ce mai încet.

Legea pătratelor inverse are o aplicație importantă în fotografie și filmări.

Astfel, dacă ne aflăm aproape de sursă, atunci intensitatea de radiație (iluminarea) este mare, iar dacă ne aflăm departe de sursă, atunci vom avea o iluminare slabă. Reieșind din aceasta, pentru a obține o expoziție corectă la fotografiere, în cazul când ne aflăm aproape de sursă, vom fixa diafragma aparatului foto aproximativ la F16, pentru a bloca surplusul de lumină.

Dacă însă ne aflăm departe de sursă, atunci trebuie să fixăm diafragma aproximativ la F4, pentru a capta mai multă lumină și deci ambele cadre vor arăta aproximativ identic (fig. 4).

© Afanas Dorin, 2022

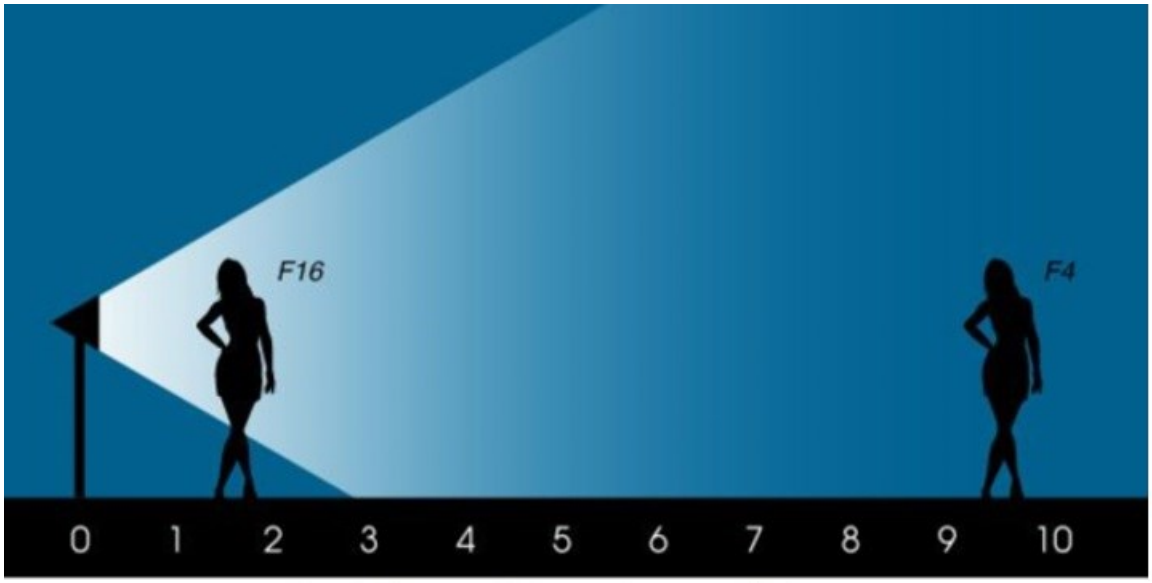


Figura 4. Fixarea diafragmei aparatului foto

Astfel, noi vom putea aproximativ estima valoarea diafragmei pentru a obține o expoziție corectă. Trebuie să reținem, că puterea iluminării de la început scade brusc, iar apoi din ce în ce mai lent. După acest principiu, noi la început deschidem diafragma brusc, iar apoi din ce în ce mai lent o dată cu îndepărtarea de la sursa de lumină.

Majoritatea vehiculelor aeriene fără pilot uman la bord pentru consum larg nu posedă diafragmă reglabilă și prin urmare va fi nevoie în unele cazuri să ne apropiem de obiectul filmat/fotografiat, iar în alte cazuri va fi necesar să ne îndepărtăm. În majoritatea cazurilor așa ceva se realizează destul de simplu cu ajutorul unui vehicul aerian.

Figura 5. Drona XIAOMI FIMI A3

© Afanas Dorin, 2022

Aplicația 2. O altă aplicație importantă a legii pătratelor inverse o găsim la semnalele radio. Se cunoaște că vehiculele aeriene fără pilot uman la bord sunt ghidate la distanță de către un operator prin intermediul semnalelor radio. Diferite vehicule aeriene pot fi dirijate la anumite distanțe. De exemplu, pentru vehiculul aerian fără pilot Xiaomi FIMI A3 (fig. 5), scos din cutie, este setată o rază utilă de 500 *m*, însă noi avem posibilitate să setăm și o rază utilă mai mare sau mai mică. În primul caz puterea emițătorului crește, iar în al doilea – descrește.

Se recomandă de rezolvat cu studenții probleme de tipul:

1. Un vehicul aerian fără pilot uman la bord avea setată o rază utilă de control de 500 *m*, apoi a fost setată raza utilă de 1000 *m*. De câte ori trebuie să crească puterea emițătorului?

Indicație. Conform legii pătratelor inverse puterea emițătorului s-a mărit de patru ori.

2. Raza utilă de control a unui vehicul aerian fără pilot uman la bord era setată la 400 *m*, apoi a fost setată la 100 *m*. De câte ori a scăzut puterea emițătorului?

Indicație. Puterea emițătorului a scăzut de 16 ori.

3. Inițial un vehicul aerian fără pilot uman la bord putea fi dirijat prin intermediul semnalelor radio pe o rază de 600 *m*. După ce operatorul a mărit puterea emițătorului vehiculului aerian, el putea fi dirijat pe o rază de 1800 *m*. De câte ori operatorul a mărit puterea emițătorului?

Răspuns: De 9 ori.

4. Puterea emițătorului unui vehicul aerian fără pilot uman la bord a fost mărită de 4 ori. De câte ori s-a mărit raza utilă de control?

Răspuns: De 2 ori.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare.

Bibliografie

1. AFANAS, D. *Metodologia implementării dronelor în procesul educațional general din perspectiva STEAM*. Chișinău, 2020, 108 p. ISBN 978-9975-117-51-7.

© Afanas Dorin, 2022

CZU: 004:62-576

PROGRAMAREA SERVOMOTORULUI ȘI SUGESTII DE UTILIZARE

Dorin AFANAS
UST, AMFA
email: afanasdde@gmail.com

Rezumat. În prezentul articol se discută posibilitatea de control a unui servomotor prin intermediul unui program creat la calculator. Pentru realizarea acestei activități vom respecta următorul algoritm:

- enumerăm toate componentele necesare;
- descriem noțiunile preliminare;
- prezentăm circuitul în două moduri;
- creăm circuitul propriu-zis;
- scriem codul programului;
- prezentăm sugestii de utilizare a unui asemenea circuit;
- punem în discuție întrebări relevante.

Cuvinte cheie: potențiometru, servomotor, condensator, circuit electric, codul programului, conector, arduino.

Abstract. This article presents the possibility of controlling a servomotor through a computer program. To perform this activity we will follow the following algorithm:

- we list all the necessary components;
- describe the preliminary notions;
- we present the circuit in two ways;
- we create the circuit itself;
- we write the program code;
- we present suggestions for using such a circuit;
- we discuss relevant questions.

Keywords: potentiometer, servomotor, capacitor, electrical circuit, program code, connector, arduino.

În cadrul acestui proiect vom realiza un circuit ce conține: fire pentru conexiune; un potențiometru; un servomotor cu braț; un condensator de 100 μF (microFarazi); antet masculin (3 pini, fig. 1).

Figura 1. Bandă cu pini masculini

© Afanas Dorin, 2022

La finele acestei activități vom putea controla un servomor prin intermediul unui program creat la calculator.

1. Noțiuni preliminare. Servomotorul este un tip special de motor care nu se rotește în cerc, ci se rotește într-o anumită poziție și rămâne acolo până când nu vom indica să se rotească din nou. Servomotorul se rotește de obicei doar la 180 de grade (un semicerc).

Asemănător modului cum se folosesc impulsuri PWM (*Modularea lățimii impulsului*) (*PWM – Pulse Width Modulation*) pentru un LED, servomotorul așteaptă un număr de impulsuri care îi indică sub ce unghi trebuie să se rotească. Impulsurile vin întotdeauna la aceleași intervale de timp, însă lățimea lor variază între 1000 și 2000 de microsecunde. Deși este posibil să scriem un cod pentru a genera aceste impulsuri, software-ul Arduino vine cu o bibliotecă care ne permite să controlăm cu ușurință servomotorul.

Deoarece servomotorul se rotește doar la 180^0, iar intrarea este analogică și variază între 0 și 1023, va fi necesar să utilizăm o funcție numită **map()** pentru a modifica scala valorilor provenite de la potențiometru. Există biblioteci pentru o mare varietate de senzori, actuatoare și alte dispozitive pe care utilizatorii le-au creat în comunitatea Arduino. O bibliotecă software extinde funcționalitatea unui mediu de programare. Software-ul Arduino vine cu o serie de biblioteci care sunt utile pentru lucrul cu hardware sau date. Una dintre bibliotecile incluse este cea proiectată pentru a fi utilizată cu servomotoare. În codul nostru vom importa biblioteca și toate funcționalitățile sale vor fi disponibile pentru noi.

2. Prezentarea circuitului. Circuitul este prezentat în figurile 2 și 3.

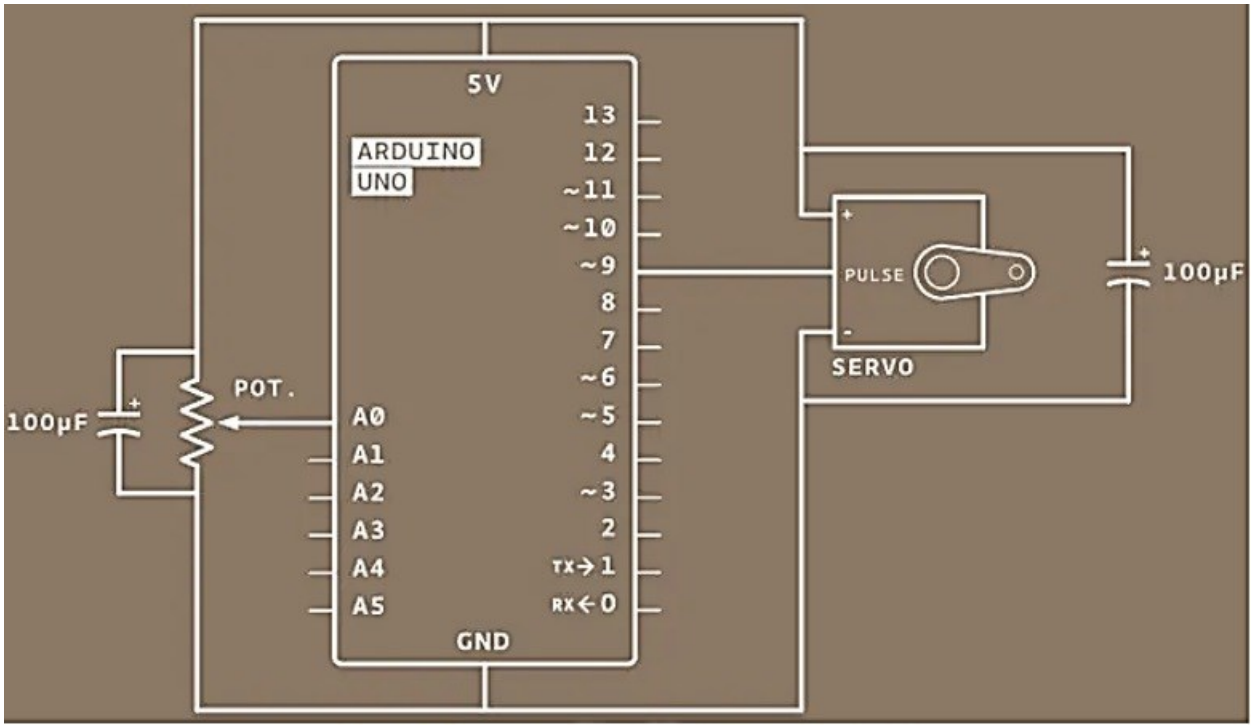


Figura 2. Prezentarea schematică a circuitului

© Afanas Dorin, 2022

Se recomandă de prezentat circuitul în două moduri: o vizualizare schematică (fig. 2) numită *prezentare schematică*, care este un mod mai abstract de a arăta relațiile dintre componente într-un circuit și altul pe panou (fig. 3) numită *ilustrația circuitului*, așa cum arată componentele real. Schemele nu arată întotdeauna unde componentele sunt plasate în realitate, ci arată mai mult cum sunt conectate între ele.

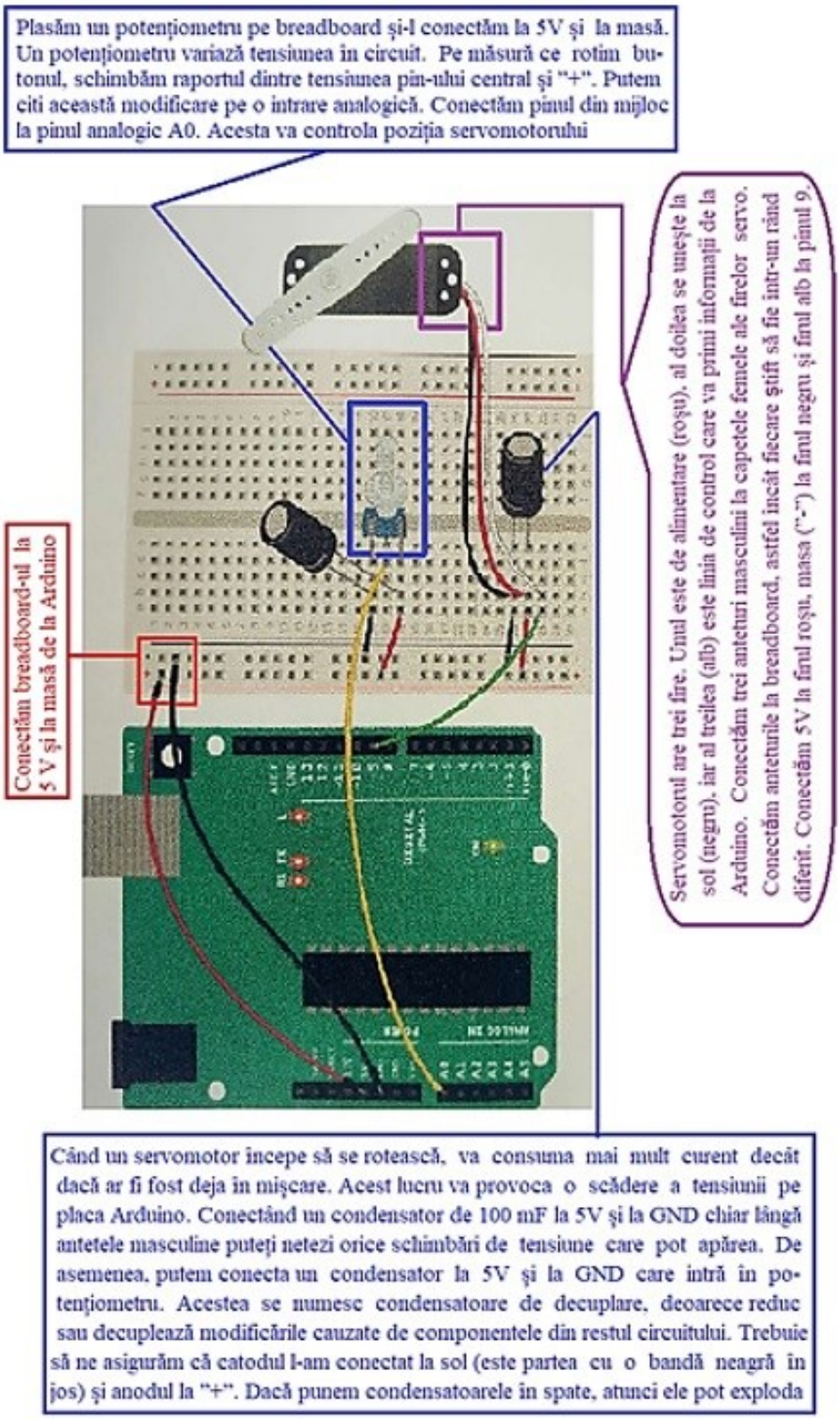


Figura 3. Ilustrația circuitului

© Afanas Dorin, 2022

Servomotorul vine cu conectori feminini și deci va trebui să adăugăm știfturi (conectori) de antet pentru a-l conecta la breadboard (fig. 4).

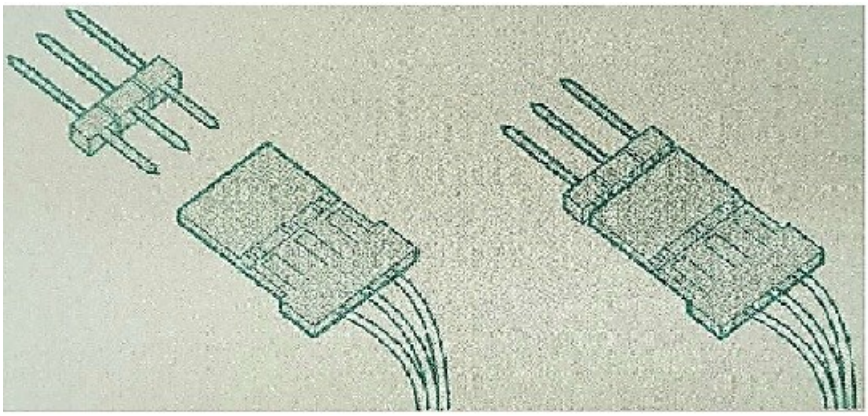


Figura 4. Conectori

3. Codul programului. Pentru scrierea codului respectăm următorul algoritm:

3.1. Importăm biblioteca. Pentru a utiliza servoteca, va trebui mai întâi să o importăm.

```
1  #include <Servo.h>
```

Trebuie să reținem că instrucțiunile ”#include” nu au punct și virgulă la sfârșitul liniei.

3.2. Creăm obiectul servo. Pentru a ne referi la servo este necesar să creăm o variabilă care se numește obiect. Astfel, vom crea un nume unic care va avea toate funcțiile și capacitățile pe care le oferă biblioteca servo sau servoteca. După crearea numelui, de fiecare dată când ne vom referi la servo, vom apela de fapt la obiectul servo.

```
2  Servo myServo;
```

3.3. Declarăm variabile. Configurăm o constantă pentru pinul la care este atașat potențiometrul și variabile pentru a menține valoarea de intrare analogică și unghiul la care dorim să se rotească servomotorul.

```
3  int const potPin = A0;
4  int potVal;
5  int angle;
```

3.4. Asociem obiectul servo cu pinul Arduino și inițializăm portul serial. În **setup()**, vom indica lui Arduino la ce pin este atașat servomotorul.

```
6  void setup ()  {
7  myServo.attach(9);
8  Serial.begin(9600);
9  }
```

Includem o conexiune serială, astfel încât să putem verifica valorile de la potențiometru și să vedem cum se mapează unghiurile de pe servomotor.

3.5. Citim valoarea potențiometrului. În operatorul **loop()**, citim intrarea analogică și imprimăm valoarea pe monitorul serial.

© Afanas Dorin, 2022

```
10 void loop()  {
11 potVal = analogRead(potPin);
12 Serial.print("potVal:   ");
13 Serial.print(potVal);
```

3.6. Mapăm valoarea potențiometrului la valorile servomotorului. Pentru a crea o valoare utilizabilă pentru servomotor din intrarea analogică, este mai comod să utilizăm funcția **map()**. Această funcție scalează numerele pentru noi. În acest caz, va schimba valorile dintre 0 – 1023 în valori dintre 0 – 179. Avem nevoie de cinci argumente: numărul care trebuie scalat (aici este **potVal**), valoarea minimă a intrării (0), valoarea maximă a intrării (1023), valoarea minimă a ieșirii (0) și valoarea maximă a ieșirii (179). Stocăm valoarea nouă în variabila **angle** (unghi), apoi imprimăm valoarea mapată pe monitorul serial.

```
14 angle = map(potVal, 0, 1023, 0, 179);
15 Serial.print(" , angle:   ");
16 Serial.println(angle);
```

3.7. Rotim servomotorul. Acum este timpul să rotim servomotorul. Comanda **servo.Write()** mută brațul motorului sub unghiul specificat. La finele operatorului **loop()** punem o întârziere, astfel încât servomotorul să aibă timp să se rotească în noua sa poziție.

```
17 myServo.write(angle);
18 delay(20);
19 }
```

După ce Arduino a fost programat și pornit, deschidem monitorul serial. Ar trebui să apară un flux de valori similar cu acesta:

```
potVal   :   1023,   angle   :   179
potVal   :   1023,   angle   :   179
```

Când rotim potențiometrul, vom observa:

- cum se schimbă numerele;
- cum brațul servomotorul se rotește într-o poziție nouă;
- relația dintre valoarea **potVal**, unghiul de pe monitorul serial și poziția brațului servomotorului.

Servomotorele sunt motoare obișnuite cu mai multe trepte de viteză și unele circuite în interior. Mecanica din interior oferă feedback circuitului, astfel încât acesta este întotdeauna conștient de poziția sa. Deși poate părea că servomotorul are o gamă limitată de mișcare, este posibil totuși să-l programăm pentru a realiza o mare varietate de diferite tipuri de mișcări cu unele piese mecanice suplimentare. Există o serie de surse care descriu în detaliu astfel de mecanisme [1, 2, 3, 4].

© Afanas Dorin, 2022

După realizarea activităților din cadrul acestei lucrări de laborator, vom pune în discuție următoarele întrebări:

- Oare potențiometrul este singurul senzor pe care îl putem utiliza pentru controlul servomotorului ?
- Folosind aceeași configurare fizică (o săgeată care indică un număr de indicatori diferiți) și un senzor diferit, ce fel de indicator putem face ?
- Cum ar funcționa acest lucru cu temperatura ?
- Am putea spune ora cu un fototranzistor ?

Servomotorele pot fi controlate cu ușurință de către Arduino folosind o bibliotecă, care este o colecție de cod ce extinde un mediu de programare. Uneori este necesar să refacem valorile prin maparea lor de la o scară la alta.

4. Sugestii de utilizare. La finele acestei lucrări de laborator putem planifica și realiza următoarea creație. Cu foarfeca decupăm o bucată de carton în formă de săgeată. Poziționăm servomotorul la 90 de grade (verificăm valoarea unghiului în monitorul serial dacă nu suntem siguri). Bandăm săgeata astfel încât să fie orientată în aceeași direcție ca și corpul motorului. Acum ar trebui să putem roti săgeata cu 180 de grade când rotim butonul potențiometrului. Luăm acum o bucată de carton cu dimensiuni mai mari decât dimensiunile servomotorul și construim un semicerc pe el. Pe o extremitate al semicercului, scriem „AȘTEPTAȚI”, pe cealaltă – „INTRAȚI”, iar în mijlocului arcului de semicerc scriem „PREGĂTIȚI-VĂ”. Plasăm servomotorul cu săgeata deasupra cartonului semicerc (fig. 5).

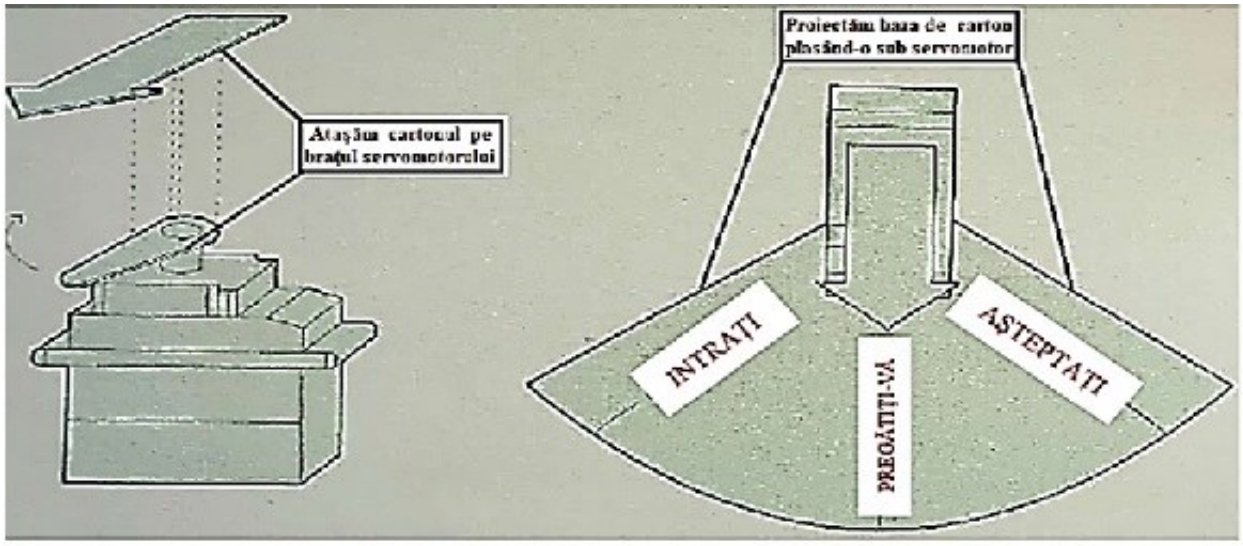


Figura 5. Sugestii de utilizare

Concluzii

În rezultatul acestor activități putem realiza următoarele obiective:

- formarea competenței de control a unui servomotor;

© Afanas Dorin, 2022

- conștientizarea principiului de funcționare a unui potențiometru;
- conștientizarea principiului de funcționare a unui condensator;
- formarea competenței de a construi un circuit electric;
- conștientizarea tipurilor de prezentare ale circuitelor electrice;
- conștientizarea necesității reprezentării circuitelor electrice prin două moduri;
- formarea competenței de utilizare a bibliotecilor încorporate;
- formarea competenței de aplicare a funcției **map()**;
- conștientizarea variabilelor utilizate;
- formarea competenței de a crea programul la calculator aferent circuitului electric construit.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare.

Bibliografie

1. U. S. Bureau of Naval Personnel. *Basic Machines and How They Work*. New York: Dover Publications, 1971.
2. MACAULAY, D. *The Way Things Work*. Boston: Houghton Mifflin, 1988.
3. KAMM, L. J. *Designing Cost-Efficient Mechanisms: Minimum Constraint Design, Designing with Commercial Components, and Topics in Design Engineering*. New York: McGraw-Hill, 1990. Also published in paperback by the Society of Automotive Engineers, Inc., 1993.
4. robives.com/mechanism.

© Afanas Dorin, 2022

CZU: 372.851:004.023

APPLICATION OF HEURISTIC METHODS IN THE OPTIMIZATION OF ROUTES CONTRIBUTING TO SUSTAINABILITY

Elisabete ALBERDI CELAYA
Irantzu ÁLVAREZ GONZÁLEZ
Zuriñe TAPIA SÁNCHEZ
University of the Basque Country UPV/EHU,
Bilbao, Basque Country (Spain)
e-mail: elisabete.alberdi@ehu.eus

Abstract. The civil engineering sector is strategic to address the challenges of today's society (climatic emergency, reduction of energy consumption, sustainable use of resources). Indeed, transport infrastructure, water supply and sanitation or waste management, among others, have a significant impact on the environment. That is why, in order to achieve a more sustainable Europe, infrastructure networks and civil engineering play a significant role.

In this work, mathematical modelling has been used in real processes, addressing different decision-making techniques and enabling process efficiency.

Using problems and projects-based learning methodologies, genetic algorithms (GA) have been applied in the calculation of optimal routes, contributing to fuel savings and generating less environmental pollution.

Keywords: heuristic methods, genetic algorithm, routes, sustainability.

APLICAREA METODELOR EURISTICE ÎN OPTIMIZAREA RUTELOR PENTRU A CONTRIBUI LA SUSTENABILITATE

Rezumat. Sectorul ingineriei civile este strategic pentru a aborda provocările societății actuale (urgență climatică, reducerea consumului de energie, utilizarea durabilă a resurselor). Într-adevăr, infrastructura de transport, alimentarea cu apă și canalizarea sau gestionarea deșeurilor, printre altele, au un impact semnificativ asupra mediului. De aceea, pentru a realiza o Europă mai durabilă, rețelele de infrastructură și ingineria civilă joacă un rol semnificativ.

În această lucrare, a fost utilizată modelarea matematică în procese reale, abordând diferite tehnici de luare a deciziilor și permițând eficiența procesului.

Utilizând metodologii de învățare bazate pe probleme și proiecte, au fost aplicați algoritmi genetici (AG) în calculul rutelor optime, ceea ce va contribui la economisirea combustibilului și la reducerea poluării mediului.

Cuvinte cheie: metode euristice, algoritm genetic, rute, sustenabilitate.

© Alberdi Celaya Elisabete, Álvarez González Irantzu, Sánchez Zuriñe Tapia, 2022

CZU: 511.14:514.11+519.1

UNELE APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN TRIGONOMETRIE ȘI COMBINATORICĂ

Iurie BALTAG
Universitatea Tehnică din Moldova
e-mail: iurie.baltag@mate.utm.md, iubaltag@mail.ru

Demonstrarea unor identități trigonometrice și combinatorice, la fel ca și calculul valorilor unor expresii trigonometrice, devine mai eficientă și în unele cazuri mai simplă, dacă aplicăm forma algebrică și cea trigonometrică a numerelor complexe.

În lucrarea de față se demonstrează unele identități trigonometrice și combinatorice și se calculează valorile unor expresii trigonometrice cu ajutorul numerelor complexe.

Astfel, se demonstrează următoarele identități:

$$cos5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx\,;$$

$$sin5x = 16sin^5x - 20sin^3x + 5sinx\,;$$

$$cosx + cos2x + cos3x + \cdots + cosnx = \frac{cosnx + cosx - \cos(n+1)\,x - 1}{2(1 - cosx)};$$

$$sinx + sin2x + sin3x + \cdots + sinnx = \frac{sinnx + sinx - \sin(n+1)\,x}{2(1 - cosx)};$$

$$cos^2x + cos^2 2x + \cdots + cos^2 nx = \frac{\sin(2n+1)x}{4sinx} + \frac{2n-1}{4}\,;$$

$$sin^2x + sin^2 2x + \cdots + sin^2 nx = \frac{2n+1}{4} - \frac{\sin(2n+1)x}{4sinx}\,;$$

$$1 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - C_{2n}^6 + \cdots = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,;$$

$$C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - C_{2n}^7 + \cdots = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots)^2 = 2^n.$$

© Baltag Iurie, 2022

CZU: 37.016:53+004

DETERMINAREA PARAMETRILOR MIȘCĂRII ACCELERATE

Viorel BOCANCEA[1]
Igor POSTOLACHI[2]
Valentina POSTOLACHI[2]
[1]*Catedra Pedagogie și Psihologie,* [2]*Catedra Fizică Teoretică și Experimentală, UST*
e-mail: vibocancea@gmail.com, postolachi@list.ru, vpostolaki65@gmail.com

Abstract. această lucrare se referă la implementarea TIC în activități practice și de laborator în predarea fizicii. Utilizând senzori digitali de ultimă generație putem studia parametrii mișcării accelerate a unui cărucior în condiții de laborator. Coordonata mobilului se determină cu senzorul digital de mișcare NeuLog–213. Viteza și accelerația mișcării se determină utilizând aproximația liniară. Integrarea Tehnologiei Informației și a Comunicațiilor (TIC) în procesul educațional permite crearea unui mediu de învățare în care elevii sunt implicați, motivați și își asumă propria responsabilitate pentru cunoștințele dobândite.
Cuvinte cheie: laborator la fizică, senzori digitali, accelerație, aproximație liniară.

Abstract. This paper refers to the implementation of ICT in practical and laboratory activities in teaching physics. Using state-of-the-art digital sensors, we can study the parameters of the accelerated movement of a trolley in laboratory conditions. The coordinate of the mobile is determined with the digital motion sensor NeuLog - 213. The speed and acceleration of the movement is determined using the linear approximation. The integration of Information and Communication Technology (ICT) in the educational process allows the creation of a learning environment in which students are involved, motivated and take their own responsibility for the knowledge acquired.
Keywords: physics laboratory, digital sensors, acceleration, linear approximation.

În cadrul studierii fizicii, cadrele didactice trebuie să utilizeze noile tehnologii, pledând pentru un concept diferit de cel tradițional de predare – învățare – evaluare, prin TIC asigură instrumente și metode care permit trecerea de la un mediu de învățare centrat pe profesor la un mediu de colaborare, interactiv, centrat pe procesul de învățare.

Pentru învățarea unităților de competență, la Fizică, un rol important îl are integrarea tehnologiei informației și a comunicațiilor în procesul didactic.

Creșterea eficienței activităților de învățare și a produselor recomandate se va obține prin utilizarea TIC pentru [1]:

- modelarea unor fenomene fizice și a funcționării unor aparate;
- realizarea de experimente în laboratoare virtuale;
- prelucrarea datelor experimentale;
- dezvoltarea competențelor de comunicare și studiul individual (a învăța să înveți) în contextul disciplinei.

© Bocancea Viorel, Postolachi Igor, Postolachi Valentina, 2022

În lucrarea data se propune o modalitate de studiere a mișcării accelerate cu senzori digitali de model NeuLog. Această lucrare este potrivită pentru formarea abilităților de cercetare a elevilor din clasa X-a la studierea unității de conținut „Cinematica” [2]:

- Studiul parametrilor mișcării accelerate;
- Determinarea vitezei și accelerației mișcării unui cărucior;
- Verificarea experimentală a uneia din formulele caracteristice mișcării rectilinii uniform variate a unui corp.

Module și senzori:

PC + aplicație NeuLog; Modul USB-200; Senzorul de mișcare NUL-213 (Motion logger) [3].

Pentru realizarea lucrării sunt necesare următoarele **Echipamente și accesorii:**

- ✓ Pistă cu lungimea de 1m;
- ✓ Magnet în carcasă de plastic – 2 buc;
- ✓ Scotch - 1buc;
- ✓ Cărucior cu cârlig (sau cu arc) – 1buc;
- ✓ Placă reflector -1 buc;
- ✓ Stativ școlar - 2buc;
- ✓ Clemă în unghi drept -3 buc;
- ✓ Tija de 20" -1 buc;
- ✓ Clemă de extensie – 1buc;
- ✓ Tijă cu scripete fix -1buc;
- ✓ Mase marcate cu tăietură de 10 g – 2 buc;
- ✓ Tija de susținere a masei marcate -1 buc;
- ✓ Fir cu lungimea de 150 cm.

Considerații teoretice:

Poziția unui corp în mișcare este marcată de obicei cu litera $\boldsymbol{x}$. Viteza corpului este marcată cu litera $\vec{\boldsymbol{v}}$. Viteza este determinată de raportul dintre variația poziției și intervalul de timp necesar pentru deplasarea corpului. Pentru a caracteriza mișcarea rectilinie neuniformă a mobilului și pentru a compara mișcările neuniforme ale diferitor corpuri mobile, se introduce noțiunea de viteză medie.

Admitem, un corp mobil, care se deplasează de-a lungul axei *OX* și în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ (1) s-a deplasat cu $\Delta S = x_2 - x_1$ (2).

Def.: Mărimea fizică egală cu raportul dintre deplasare și intervalul de timp corespunzător se numește viteză medie a corpului în acest interval de timp:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\overrightarrow{\Delta S}}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Din motive de securitate în localitățile din republica Moldova este stabilită viteza maximă de 50km/h, care este considerată nepericuloasă.

Def.: Viteza de mișcare a corpului în momentul dat de timp, în punctul dat se numește viteză momentană:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta S}}{\Delta t};\ \Delta t \to 0. \qquad (4)$$

Vitezometrul automobilului indică viteza momentană.

Mișcarea rectilinie a corpului, în care viteza lui variază se numește mișcare accelerată.

© Bocancea Viorel, Postolachi Igor, Postolachi Valentina, 2022

Def.: Raportul dintre variația vitezei Δv și intervalul de timp Δt în care are loc această variație se numește accelerație (în latină acceleratio „a grăbi”):

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Accelerația este mărimea fizică ce caracterizează rapiditatea variației vitezei mobilului. Accelerația mobilului in mișcare rectilinie uniform variată este o mărime constanta: a= const.

Unitatea de măsură pentru accelerație în SI este:

$$[\vec{a}] = \frac{[\Delta \vec{v}]}{[\Delta t]} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}. \qquad (6)$$

Formula de mai sus descrie în mecanică accelerația medie (sau accelerația constantă). Pentru a calcula accelerația momentană a obiectului **a(t)**, împărțim o secțiune foarte mică a modificării vitezei la intervalul de timp în care are loc modificarea.

Pentru a realiza obiectivele lucrării vom observa mișcarea (înainte și înapoi) a unui cărucior pe o pistă. Vom observa și analiza modificările poziției, vitezei și accelerației căruciorului în timp.

Configurarea instalației experimentale

1. Pentru realizarea lucrării configurăm utilajul și senzorii așa cum se arată în fig.1.

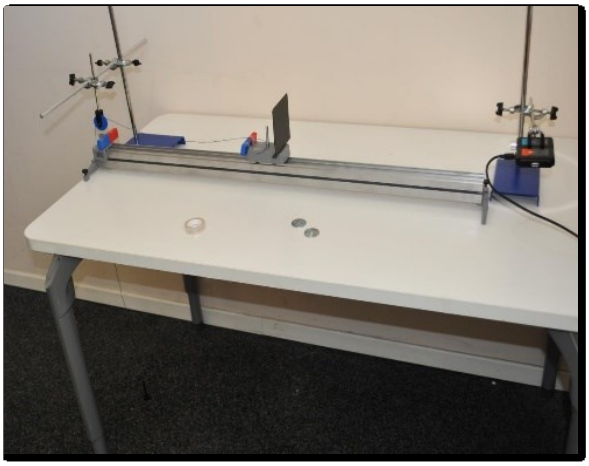


Figura 1. Instalația experimentală pentru studiul mișcării accelerate

2. Asamblăm pe pistă: căruciorul, placa reflectoare și senzorii cum este reprezentat în fig.1.
3. Fixăm un magnet pe suportul de la capătul pistei și alt magnet pe cărucior, astfel ca ei să se respingă reciproc. O altă opțiune este utilizarea unui arc elastic, care după comprimare va întoarce căruciorul în sens opus.
4. Montăm tija cu scripetele pe stativ la capătul mesei deasupra pistei (fig.1).
5. Legăm un capăt al firului de 150 cm de cârligul căruciorului, iar celălalt capăt de tija pentru corpurile cu masa marcată.

© Bocancea Viorel, Postolachi Igor, Postolachi Valentina, 2022

6. Verificăm dacă atunci când tija cu masele marcate ajunge la podea, căruciorul mai are de parcurs circa 30-40 cm pentru a se deplasa pe pistă.
7. Fixăm senzorul de mișcare NUL-213, conectat la modulul USB-200, pe suport.
8. Orientăm senzorul digital de mișcare NUL-213 spre placa reflectoare a căruciorului și verificăm dacă placa căruciorului este în linie cu senzorul de mișcare pe tot parcursul traseului de pe pistă. Dimensiunea plăcii reflectoare trebuie să fie de cel puțin (10x10) cm.

Configurarea și testarea senzorului digital Nul-213. Se recomandă să exersați în prealabil funcțiile aplicației NeuLog utilizând descrierea din ghidul de utilizare [3].

9. Conectăm senzorul Nul-213 prin modulul USB-200 la computer.
10. Rulăm aplicația NeuLog și verificați dacă senzorul de mișcare NUL-213 este identificat.
11. Selectăm butonul „*Distance*” pentru a schimba intervalul de drum al senzorului de mișcare (2m) (Fig.2).
12. Facem clic pe pictograma „*Run Experiment*” și setăm:
    - Durata experimentului - *5 secunde;*
    - Frecvența de măsurare - *20 măsurări pe secundă*.

Notă: Senzorul măsoară distanța până la un obiect cu ajutorul impulsurilor scurte de ultrasunet. Distanța se determină ca rezultatul înmulțirii vitezei ultrasunetului la intervalul de timp, necesar pentru a parcurge această distanță. Fasciculul de ultrasunet se propagă în limitele unui unghi solid de aproximativ 45°. Asigurați-vă că nu sunt alte obiecte în regiunea de propagare a fasciculului de ultrasunet emiși de senzor.

Figura 2. Configurarea senzorului digital Nul-213

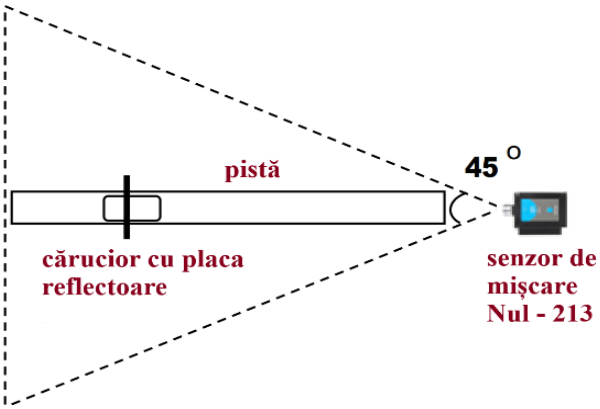


Figura 3. Schema principială a lucrării de laborator

13. Înainte de a începe experimentul, asigurați-vă că senzorul de mișcare este aliniat cu traseul căruciorului. Observăm pe ecran că valorile poziției (distanța dintre placă și senzor) apar deja în caseta modulului senzorului.

14. Mișcați căruciorul de la punctul de plecare, care se află la 30 cm de senzorul de mișcare, până la marginea șinei și asigurați-vă că senzorul urmărește distanța căruciorului pe tot parcursul deplasării.
15. Așezăm cele două corpuri cu masa a câte 10g pe suportul care va pune în mișcare căruciorul.
16. Așezați din nou căruciorul în poziția inițială și faceți clic pe pictograma „*Record*” (înregistrare) pentru a începe măsurarea.
17. . Eliberăm căruciorul și observăm mișcarea acestuia.
18. Graficul obținut ar trebui să fie similar cu cel din fig.4.

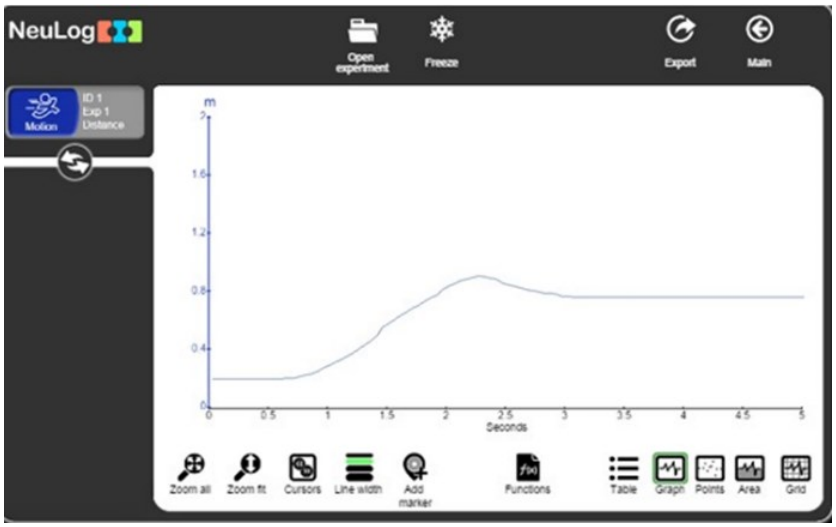


Figura 4. Graficul mișcării accelerate

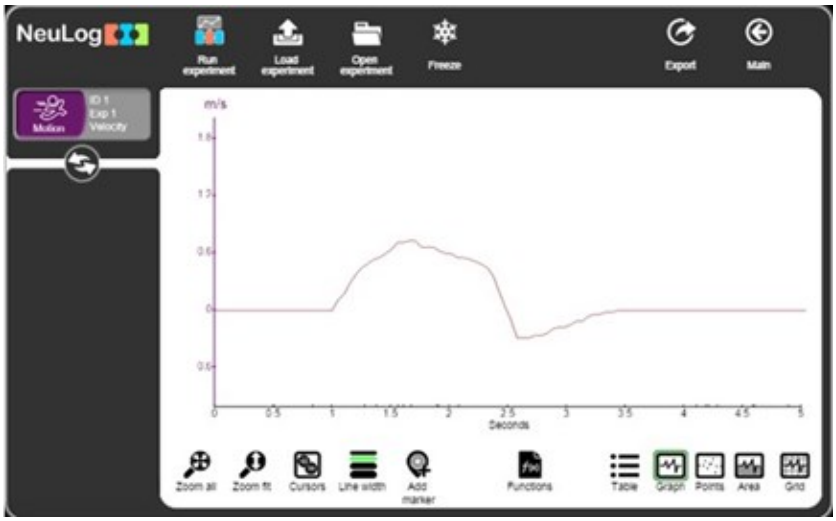


Figura 5. Graficul vitezei căruciorului în timp

19. La necesitate folosim pictograma „*Zoom fit*” pentru a mări imaginea graficului, de exemplu, dacă este proiectată pe ecran.

20. Dacă graficul obținut nu este similar cu cel din Fig.4, verificați dacă căruciorul se mișcă tot timpul de-a lungul direcției pe care se află senzorul de mișcare și verificați dacă nu sunt alte obiecte care să trimită un ecou senzorului.
21. Pentru a salva graficul facem click pe pictograma „*Export*” și apoi pe butonul „*Save value table (CSV)*”.
    Înainte de obține graficele vitezei și accelerației propunem elevilor să deseneze graficele așteptate (Cum ar trebui să arate graficele vitezei și accelerației?).
22. Facem clic pe caseta „*Module box*” **(**Modulul senzorului) și trecem senzorul la modul de măsurare a vitezei, m/s.
23. Așezăm din nou căruciorul în poziția inițială și faceți clic pe Pictograma „*Record*” de înregistrare pentru a începe din nou măsurarea.
24. Eliberăm căruciorul și observăm mișcarea.
25. Graficul obținut ar trebui să fie similar cu graficul din fig.5.
26. Pentru a salva graficul facem click pe pictograma „*Export*” și apoi pe butonul „*Save value table (.CSV)*”. Pe graficul vitezei evidențiem patru sectoare (patru linii frânte). În continuare vom determina accelerația căruciorului pe fiecare sector.
27. Pentru a calcula accelerația primului sector, facem clic pe pictograma „*Cursors*” și selectăm sectorul AB din grafic, care reprezintă creșterea vitezei căruciorului.
28. Facem clic pe pictograma *Funcții*.
29. Facem clic pe butonul „*Functions*” (Funcții) din stânga ecranului și apoi pe butonul „*Linear fit of A*” (Aproximație liniară).
30. Facem clic pe câmpul casetei „*Linear fit of A*” și vom obține ecuația liniară a vitezei pe sectorul AB.

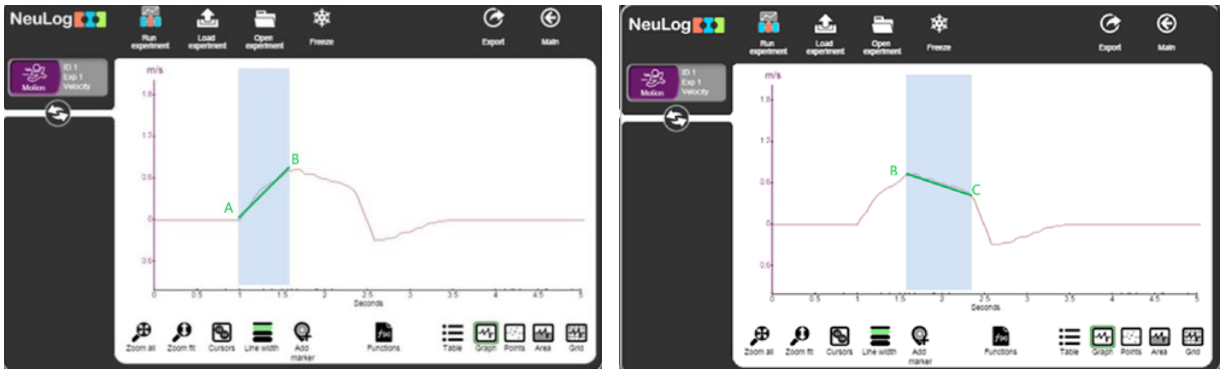


Figura 6. Evidențierea sectorului AB și BC
în graficul dependenței vitezei căruciorului de timp

Pe acest sector de drum (AB), căruciorul se îndepărtează de la senzor accelerat și viteza lui crește; prin urmare accelerația este pozitivă. Panta dreptei reprezintă accelerația: **a=1,2m/s^2**. Ecuația mișcării este: **Y=1,2X -1,125**.

Pentru sectorul BC (fig.6), căruciorul continuă să se îndepărteze de senzor, dar viteza acestuia scade, deoarece corpurile care imprimau accelerație sistemului au ajuns la podea, prin urmare accelerația este negativă. Ecuația mișcării pe sectorul BC este:

Y= -0,453X +1,481, unde accelerația $\mathbf{a_{BC}}$**= -0,45m/s²**.

Pentru sectorul CD (fig. 7) se obține ecuația liniară de forma:

$$\boldsymbol{Y = -2,909X + 7,164},$$

unde valoarea accelerației este $\boldsymbol{a = -2,909\frac{m}{s^2}}$. După ce căruciorul se oprește în punctul unde **v=0**, viteza se mărește în sens opus, dar accelerația rămâne încă negativă, până în punctul **D**.

Repetând procedura de aproximație liniară pentru sectorul de drum **DE** vom obține ecuația liniară**:** $\boldsymbol{Y = 0,280X - 1,052}$. Accelerația pe acest sector este pozitivă și egală cu $\boldsymbol{a = 0,280\frac{m}{s^2}}$. La sfârșitul acestui sector căruciorul se oprește sub acțiunea forței de frecare.

Cu ajutorul instalației prezentate în fig.1 putem obține și graficul experimental al accelerației.

31. Faceți clic pe caseta „*Module box*” (Modul senzorului) și schimbați parametrul care trebuie detectat - accelerația; m/s2.
32. Așezăm din nou căruciorul în poziția inițială de start și faceți clic pe pictograma „*Record*” de înregistrare pentru a începe măsurarea accelerației.

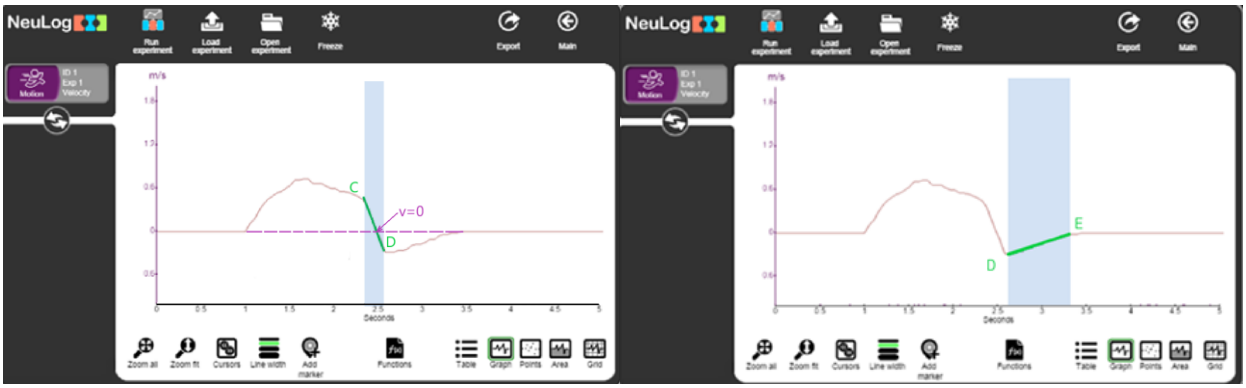


Figura 7. Evidențierea sectorului CD și DE
în graficul dependenței vitezei căruciorului de timp

33. Eliberați căruciorul și observați-i mișcarea neuniformă.
34. Graficul obținut ar trebui să fie similar cu dependența din fig.8.
35. Analizați graficul accelerației (Fig. 8) și comparați-l cu graficul vitezei (Fig.5). Evidențiați și discutați accelerația în punctele **A, B, C** și **D** din dependența grafică (Fig.8).

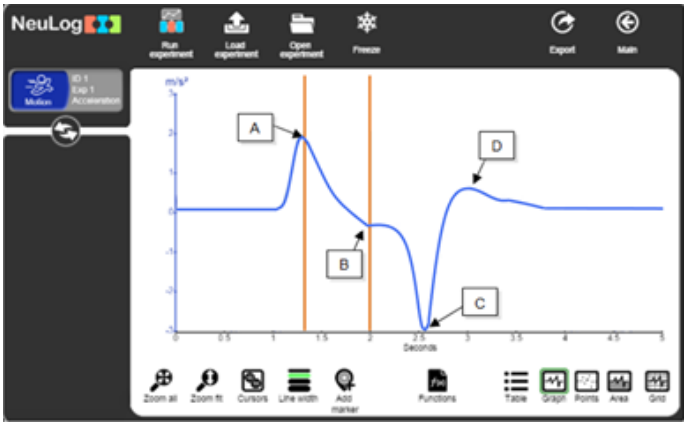


Figura 8. Graficul accelerației căruciorului

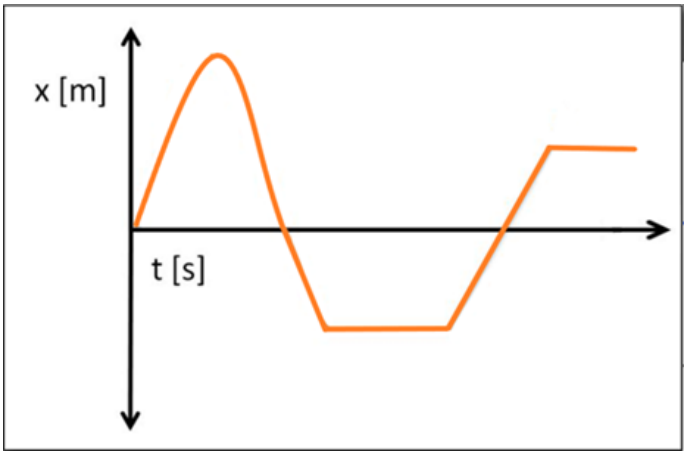


Figura 9. Graficul mișcării neuniforme

36. *Pentru consolidarea abilităților practice de măsurare cu senzorul digital Nul-213* putem repeta experimentul pentru o altă forță de greutate, care accelerează căruciorul (schimbăm masa corpurilor marcate).
37. Analizați graficele coordonatei și vitezei ale experimentului de provocare.
38. Analizați și descrieți graficul din fig. 9, respectând metodologia anterioară.

Studiu realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, Programul „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20.

Bibliografie

1. FIZICĂ. ASTRONOMIE. Clasele X-XII. GHID de implementare a curriculumului. Chișinău, 2019.
2. MARINCIUC, M.; RUSU, S. *Fizică. Manual pentru clasa* 10-a. Știința, 2012. 180 p.
3. Neuron Logger. Sensor Network Technology User Guide. Disponibil online la adresa https://neulog.com/Downloads/NeuLog_User_Guide_Ver_6_21_EN.pdf

© Bocancea Viorel, Postolachi Igor, Postolachi Valentina, 2022

CZU: 378.147

PEDAGOGICAL MODELING OF THE PROCESS OF TEACHING THE UNIVERSITY DISCIPLINE "INFORMATION SECURITY"

Violeta BOGDANOVA, Liubomir CHIRIAC
Tiraspol State University, Republic of Moldova
e-mail: bogdanovaleta@gmail.com, llchiriac@gmail.com

Abstract. In this paper the advantages of the cybernetic approach in the process of pedagogical modeling is considered. From the standpoint of a systematic approach, the main purpose and the main objectives for the study of information security by future economists were designed. The process of creating the pedagogical model and its advantages helps to understand better how to teach the basics of information security. Some methodological aspects of the implementation of the pedagogical model for studying the basics of information security by future economists are described.
Keywords: pedagogical model, systems approach, information security, interdisciplinarity, Internet technology.

MODELAREA PEDAGOGICĂ A PROCESULUI DE PREDARE A DISCIPLINEI UNIVERSITARE „SECURITATEA INFORMAȚIEI”

Rezumat. În această lucrare sunt luate în considerare avantajele abordării cibernetice în procesul de modelare pedagogică. Prin abordarea sistematică, au fost concepute scopul și obiectivele principalele pentru studiul securității informațiilor de către viitorii economiști. Procesul de creare a modelului pedagogic și avantajele acestuia ajută la înțelegerea mai bună a modului de predare a elementelor de bază ale securității informațiilor. Sunt descrise aspecte metodologice ale implementării modelului pedagogic pentru studierea bazelor securității informațiilor de către viitorii economiști.
Cuvinte cheie: model pedagogic, abordare sistemică, securitatea informației procesul de studiu, interdisciplinaritate, tehnologii Internet.

1. The cybernetic approach in the process of pedagogical modeling

The use of a cybernetic approach in modeling the pedagogical process in such a dynamic area as information security helps to increase the efficiency of the learning process itself. To do this, it is necessary to determine the goal and objectives of training, the level of initial knowledge, skills and abilities, choose the forms and methods of organizing the educational process to obtain maximum results at minimum cost, apply information and Internet technologies to manage the learning process. Its optimization will consist in adjusting the topics of theoretical and practical work, applied didactic methods.

The purpose of the discipline “Information security” is to develop students' stable skills of working in a complex network information environment of a modern enterprise, office, taking into account the basic requirements of information security.

The main objectives of the discipline: obtaining information about the current state of the problems of ensuring information security of computer systems, existing threats,

© Bogdanova Violeta, Chiriac Liubomir, 2022

types of information security, methods and means of protecting information, the basics of building complex protection systems, the basics of legal regulation of relations in the information sphere, constitutional guarantees of citizens' rights to receive information and mechanisms for their implementation, concepts and types of protected information [1].

As a result of studying the discipline "Information Security", the student *must:*

- ✓ *know*: normative and legislative acts in the field of information protection; information security threats; formal and informal means of information protection; user identification and authentication methods; principles of creating an electronic digital signature, hashing algorithms; methods of symmetric and asymmetric encryption; anti-malware systems;
- ✓ *be able to*: analyze the sources of threats and channels of information leakage; apply the most effective methods and means of information protection; design organizational measures to protect information; monitor the effectiveness of protection measures;
- ✓ *own:* terminology in the field of information security; technology to counter information threats; protection of information from malicious software; skills in selecting and configuring information security software; interpretation of the results and analysis of data from system logs of protection tools.

2. The pedagogical model of the studying the information security by economists

A distinctive feature of the design of the pedagogical model was the use of a modern and powerful apparatus of systems theory and system analysis. Initially, the process of information security training for future economists was described as a "black box" model, then as a "system composition" model [2]. The reflection of the connections between subsystems and the consideration of the external environment made it possible to build a pedagogical model in the notations of the "system structure" model. Thus, the pedagogical model of teaching the basics of information security to future economists reflects the object of study from the point of view of a systematic approach, helps to understand how the system functions.

The process of developing a pedagogical model in itself helped to better understand the processes and phenomena that occur when teaching the basics of information security to future economists, and to be able to predict possible directions of development [3].

The peculiarity of the developed pedagogical model is that in the formation of the theoretical and practical part of the content of training, the relationship between information security and economic security is taken into account. Correlating discipline topics with economic phenomena and processes helps students answer the questions “What to protect?”, “From whom to protect?”, “How to protect?” (Fig. 1).

© Bogdanova Violeta, Chiriac Liubomir, 2022

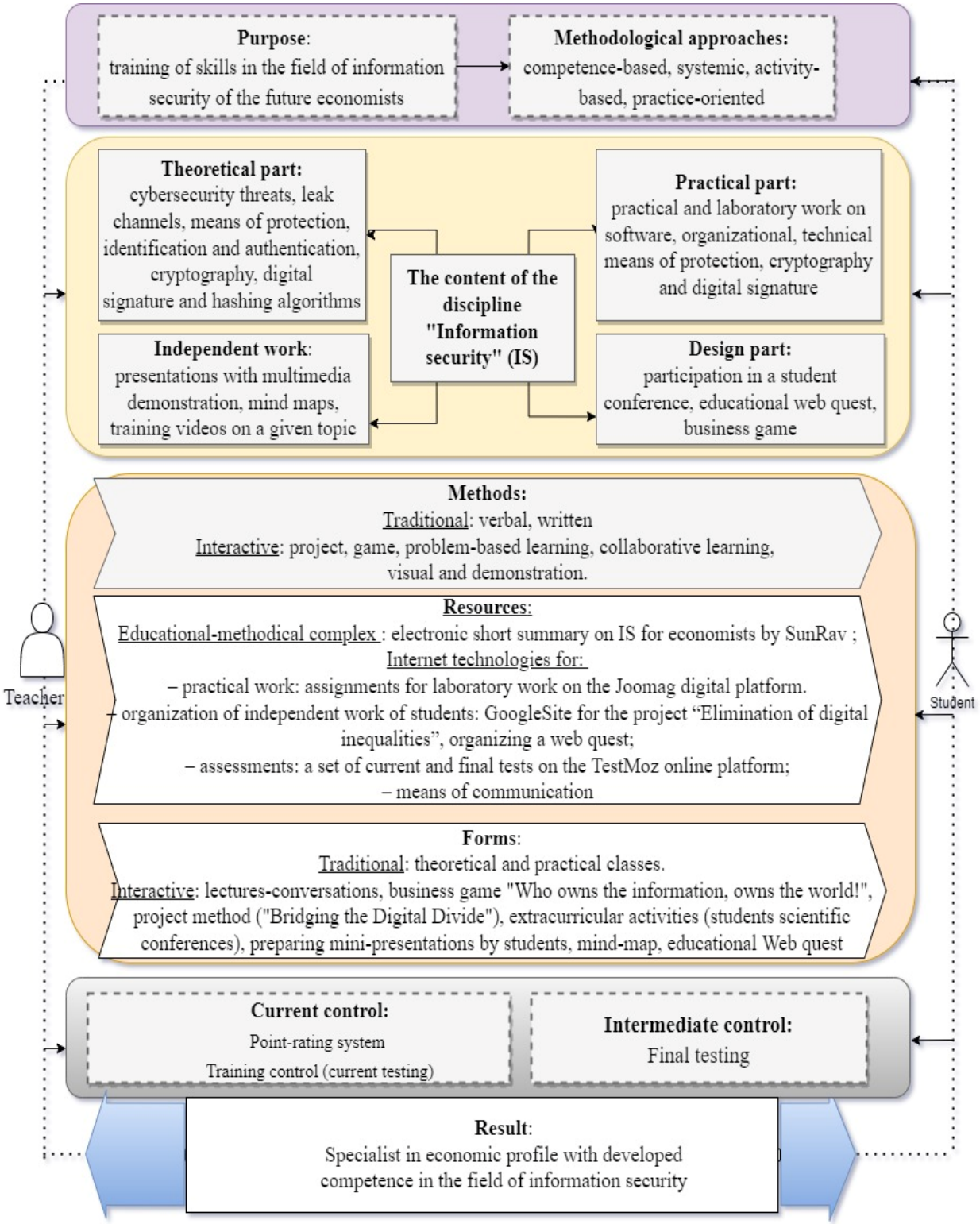


Figure 1. Pedagogical model

The pedagogical model is aimed at identifying interdisciplinary links between information security and other branches of knowledge studied at the university by future specialists in the financial and economic domain. Interdisciplinary connections, the impact of information security on economics, make it possible to achieve a better development of competencies in the field of information security for future specialists in

© Bogdanova Violeta, Chiriac Liubomir, 2022

financial and economic profile from the perspective of Internet technologies and student-centered learning. Practical implementation lies in the use of Internet technologies at all stages of teaching-learning-assessment.

3. The methodological aspects of the implementation of the pedagogical model

An important *methodological aspect of the implementation* of the pedagogical model is information and communication technologies, especially *Internet technologies*, which are convenient to use due to the advantages: 1) the ability to quickly make changes, which is especially important for the discipline "Information Security"; 2) the ability to quickly obtain information from any computer, device with access to the Internet; 3) the possibility of placing additional materials of increased complexity for students with a higher level of informational training. For each subsystem of the process "teaching" - "learning" - "assessment" identified in the course of the system design described above, various information and communication tools and information services of the Internet are used.

The *methodological aspects of the organization of project activities* to enhance the independent work of students are implemented using project technology [4], namely an educational web quest [5]. Two educational web quests have been developed: "Information Security for Economists" and "Fundamentals of Cryptography". An educational project allows students to face a problem situation, expand the subject of the course, develop the creative abilities, independent activity, improve skills to communication and to working in a group, arouse interest in the learning process as a whole.

Methodological aspects of assessment include a point-rating system of evaluation. At the beginning of studying the discipline, students get acquainted with the boundaries and criteria that are unchanged throughout the semester. When evaluating practical and laboratory work, a system of criteria is applied, taking into account delays and corrections.

The current testing is used as a training control on the theoretical material, and is not evaluated by points. Current computer testing helps to combat the uneven work of students in the semester, so it can be seen as an incentive for independent work. This test plan consists of 3-4 questions and takes 3-5 minutes to complete.

At the end of the course students take a final test. Questions of different complexity levels are designed to cover all topics of the discipline [6].

The combination of testing with classical methods of control allows students to receive an objective assessment and a high level of knowledge and skills in the discipline.

The *methodological aspect of interdisciplinarity* is significant in the implementation of the designed pedagogical model, because the interpenetration of sciences makes it

© Bogdanova Violeta, Chiriac Liubomir, 2022

possible to improve the quality of education, to substantiate the adequacy of the acquired knowledge of real life. Interdisciplinary connections are traced in each lesson in the study of information security. At the level of familiarization, memorization and understanding, topics with the least number of connections are taught. Particular attention should be paid to legal, moral and ethical ways of protecting information. Especially for future economists, it is important to emphasize the connection between information and economic security in order to show the sequence of occurrence of such phenomena in professional activity as information threats, information and economic risks, and economic damage.

4. Conclusion

The development of information and communication technologies is vital for the competitiveness of the Republic of Moldova in an economy that is rapidly becoming more digital. Innovation using cutting-edge ICTs is becoming a driving force for socio-economic change, including the rethinking of the educational paradigm. Thus, the advantages provided by ICT, Internet technologies are analyzed and the usefulness of their introduction into the educational space of the university is argued. In particular, the process of improving the quality of studying information security technologies from the position of Internet technologies in the professional training of students in the financial and economic domain is considered.

To implement this process, active learning methodologies have been developed and implemented that are student-centered and focused on developing their competencies and skills for lifelong learning through effective and friendly teacher-student cooperation in the process of teaching-learning-assessment.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20

Bibliography

1. БОГДАНОВА, В. А.; КИРИЯК, Л. Л. Методическая система обучения дисциплины «Защита компьютерной информации» студентам гуманитарного профиля. In: *Acta Et Commentationes. Педагогические науки,* 2018. № 2(13), pp. 50-61. ISSN 1857-0623.
2. БЛИНКОВ, Ю.В. *Основы теории информационных процессов и систем*. Пенза: ПГУАС, 2011. 184 с. ISBN 978-5-9282-0725-0.
3. БОГДАНОВА, В. А. Информационно-кибернетический подход к проектированию педагогического эксперимента In: *Revista de Stiinţe*

© Bogdanova Violeta, Chiriac Liubomir, 2022

Socioumane, 2021. Nr. 2 (48), c. 112-125. ISSN 1857-0119.

4. БОГДАНОВА, В.; КИРИЯК Л. Реализация концепции «Устранение цифрового неравенства» в рамках дисциплины «Информационная Безопасность» при обучении экономистов в ВУЗе In: *Învăţământ superior: tradiţii, valori, perspective, Conferinţa ştiinţifica naţionala cu participare internaţională*, vol.I, 29-30 septembrie 2020. Chişinău: UST, 2020. pp.357-361. ISBN 978-9975-76-311-0.
5. БОГДАНОВА, В. А.; КИРИЯК, Л. Л. Особенности проектирования веб-квеста «Информационная безопасность экономистов». In: *Conferința științifica naționala cu participare internaţională „Învăţământ Superior: Tradiţii, Valori, Perspective". Didactica Ştiinţelor*. 27 – 28 septembrie, 2019. Chişinău: UST, 2019. pp. 127-131. ISBN 978-9975-76-284-7.
6. БОГДАНОВА, В.; КИРИЯК, Л. Применение балльно-рейтинговой системы контроля знаний при изучении дисциплины «Информационная безопасность» студентами экономистами. In: *Conferinţa ştiinţifică cu participare internaţională «Învăţământul superior: tradiţii, valori, perspective»*, Chișinău, 1 - 2 octombrie 2021. Chişinău : UST, 2021. vol. 1, pp. 30-36. ISBN 978-9975-76-361-5.

© Bogdanova Violeta, Chiriac Liubomir, 2022

CZU: 512.7

DESPRE CONGRUENȚELE DE GRADUL DOI DUPĂ UN MODUL PRIM

Valeriu BORDAN

Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, Universitatea de Stat din Tiraspol

e-mail: valeriu.bordan@gmail.com

Rezumat. În lucrare sunt descrise congruențele de gradul doi după un modul prim. Este arătat cum putem determina compatibilitatea sau incompatibilitatea unei congruențe de gradul doi după un modul prim, calculând resturile, respectiv nonresturile pătratice după acest modul.

Cuvinte-cheie: congruență de gradul doi, soluție a congruenței, rest pătratic, nonrest pătratic, clasă de resturi pătratice, clasă de nonresturi pătratice.

Abstract. In the paper are described the congruences of second degree after a prime module. It is shown how we can determine the compatibility or incompatibility of a congruence of the second degree after a prime module, by calculating the quadratic residues or nonresidues after this module.

Keywords: congruence of the second degree, solution of the congruence, quadratic residue, quadratic nonresidue, class of quadratic residues, class of quadratic nonresidues.

Teoria congruențelor are o importanță deosebită atât în algebră în general, aplicându-se la studierea diferitor structuri algebrice, inclusiv grupuri, inele, subinele, ideale [2], cât și în teoria numerelor [5]. Este cunoscut faptul că pentru ecuațiile algebrice de gradul $\boldsymbol{n}$ peste un câmp numărul de rădăcini nu întrece gradul. Afirmația dată nu mai rămâne adevărată în cazul când o extindem peste un inel. De exemplu, într-un inel cu divizori a lui zero există ecuații algebrice, în care numărul rădăcinilor este mai mare decât gradul ecuației. Similar pentru congruențele de gradul $\boldsymbol{n}$ după un modul arbitrar $\boldsymbol{m}$ avem exemple, în care numărul rădăcinilor întrece gradul congruenței. De exemplu, congruența $\boldsymbol{x^2 \equiv 0(mod\ 9)}$ are gradul 2, dar numărul de rădăcini este 3, având ca rădăcini clasele de resturi $\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{6}}$. Pentru congruențele de gradul $\boldsymbol{n}$ după un modul prim, avem aceiași situație ca și în cazul ecuațiilor algebrice peste un câmp. Mai exact, cunoscuta teoremă a lui Lagrange afirmă că orice congruență de gradul $\boldsymbol{n \geq 1}$, după un modul prim, admite cel mult $\boldsymbol{n}$ soluții.

Altfel spus, rolul câmpului pentru ecuațiile algebrice de ordin superior este similar rolului modulului prim pentru congruențele de ordin superior.

Un rol important în teoria congruențelor de gradul $\boldsymbol{n}$ îl joacă congruențele de gradul doi după un modul număr prim, care reprezintă o generalizare a ecuațiilor de gradul doi cu o singură necunoscută cu coeficienți întregi [3; 4]. În continuare vom cerceta congruențele de gradul doi după un modul număr prim și unele aplicații practice ale acestora prin alcătuirea și rezolvarea unor exemple.

© Bordan Valeriu, 2022

Considerăm congruența de gradul doi după un modul prim în forma generală $\boldsymbol{a_2x^2+a_1x+a_0 \equiv 0(mod\ p), a_i \epsilon Z, i=\overline{0,2}, a_2 \not\equiv 0(mod\ p)}$ (1).

Arătăm în continuare că orice congruență de forma (1) este echivalentă cu o congruență de gradul doi cu coeficientul termenului dominant egal cu 1. Într-adevăr, deoarece $\boldsymbol{a_2 \not\equiv 0(mod\ p)}$, rezultă că $\boldsymbol{(a_2,p)=1}$. Prin urmare, congruența liniară $\boldsymbol{a_2y \equiv 1(mod\ p)}$ are o singură soluție $\boldsymbol{y_0 \in Z}$. Astfel avem $\boldsymbol{a_2y_0 \equiv 1(mod\ p)}$. Înmulțind congruența (1) cu $\boldsymbol{y_0}$, obținem $\boldsymbol{(a_2y_0)x^2+(a_1y_0)x+a_0y_0 \equiv 0(mod\ p)}$.

Astfel obținem $\boldsymbol{x^2+(a_1y_0)x+a_0y_0 \equiv 0(mod\ p)}$ sau $\boldsymbol{x^2+b_1x+b_0 \equiv 0(mod\ p)\ (2)}$, unde $\boldsymbol{b_1 \equiv a_1y_0(mod\ p), b_0 \equiv a_0y_0(mod\ p)}$. Deci, am obținut congruența (2), coeficientul terminului dominant al căreia este egal cu 1, care este echivalentă cu congruența (1).

Deoarece în congruența (2) pentru $\boldsymbol{p=2}$ aflarea soluțiilor se reduce la o verificare simplă a claselor de resturi $\boldsymbol{\overline{0}}$ și $\boldsymbol{\overline{1}}$, vom considera că $\boldsymbol{p \neq 2}$.

Arătăm în continuare că orice congruență de forma (2), în care $\boldsymbol{p \neq 2}$ se reduce la rezolvarea unei congruențe de forma $\boldsymbol{x^2 \equiv a(mod\ p), a \in Z\ \ (3)}$. Observăm că pentru numere prime relativ mici, rezolvarea congruențelor de forma (1) la fel poate fi realizată nemijlocit prin verificări ale claselor de resturi $\boldsymbol{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}}$.

Astfel trecerea de la congruența (2) la congruența (3) prezintă interes în practică pentru numere prime mai mari.

Așa cum am considerat că cercetăm cazul când $\boldsymbol{p}$ este un număr mai mare decât 2, rezultă că $\boldsymbol{p}$ este număr prim impar. În congruența (2), în dependență de paritatea numărului $\boldsymbol{b_1}$, deosebim două cazuri:

Cazul 1. Admitem că $\boldsymbol{b_1}$ este număr par, adică $\boldsymbol{b_1=2k, k \in Z}$. Înlocuind în (2), obținem:

$$\boldsymbol{x^2+b_1x+b_0=x^2+2kx+k^2-k^2+b_0=(x+k)^2-(k^2-b_0) \equiv 0(mod\ p)}.$$

Notând $\boldsymbol{x+k=y,\ k^2-b_0=a,}$ obținem congruența de forma (3) $\boldsymbol{y^2 \equiv a(mod\ p)}$ în aport cu variabila $\boldsymbol{y}$. Astfel am arătat că rezolvarea congruenței de forma (1), respectiv (2), se reduce la rezolvarea unei congruențe de forma (3).

Cazul 2. Fie numărul $\boldsymbol{b_1}$ este impar, adică $\boldsymbol{b_1=2k+1}$.

Efectuând transformările corespunzătoare în (2), obținem:

$$\boldsymbol{x^2+b_1x+b_0 \equiv x^2+(2k+1)x+px+b_0 \equiv x^2+(2k+1+p)x+b_0(mod\ p)}.$$

Deoarece $\boldsymbol{p}$ este număr impar, $\boldsymbol{2k+1+p}$ este număr par, prin urmare congruența obținută este de forma congruenței cercetate în cazul 1.

Și în cazul 2 avem că aflarea soluțiilor congruenței de forma (2) se reduce la rezolvarea unei congruențe de forma (3).

© Bordan Valeriu, 2022

Considerăm în continuare congruența de forma (3) $\boldsymbol{x^2 \equiv a(mod\, p), p}$ –număr prim impar. Dacă $\boldsymbol{a = 0}$, atunci congruența este trivială, fiindcă $\boldsymbol{x^2 \equiv 0(mod\, p) \Leftrightarrow x^2 \vdots p \Leftrightarrow x \vdots p \Leftrightarrow x \equiv 0(mod\, p) \Leftrightarrow x = kp, k \in Z}$. Astfel în acest caz mulțimea soluțiilor congruenței coincide cu mulțimea multiplilor numărului $\boldsymbol{p}$.

Fie $\boldsymbol{a \neq 0}$, atunci $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{p}$ sunt prime între ele, adică $\boldsymbol{(a, p) = 1}$.

În acest caz, dacă congruența este compatibilă, se arată că ea are exact 2 soluții (două clase de resturi diferite după modulul $\boldsymbol{p}$).

Într-adevăr, dacă admitem că $\boldsymbol{x_0}$ este soluție a congruenței (3) cu $\boldsymbol{a \neq 0}$, atunci $\boldsymbol{{x_0}^2 \equiv a(mod\, p)}$. Evident că atunci opusul lui $\boldsymbol{x_0}$, adică $\boldsymbol{-x_0}$ la fel este soluție a congruenței (3). Considerând clasele de resturi $\boldsymbol{\overline{x_0}}$ și $\boldsymbol{\overline{-x_0}}$ după modulul $\boldsymbol{p}$, acestea aparțin mulțimii $\boldsymbol{\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}\}}$. Deoarece modul $\boldsymbol{p}$ este număr impar, clasele de resturi $\boldsymbol{\overline{x_0}}$ și $\boldsymbol{\overline{-x_0}}$ sunt generate respectiv de elementele $\boldsymbol{x_0}$ și $\boldsymbol{-x_0}$ de paritate diferită, fiindcă $\boldsymbol{-x_0 \equiv p - x_0(mod\, p)}$. Astfel, obținem că dacă clasa de resturi $\boldsymbol{\overline{x_0}}$ este generată de numărul natural par $\boldsymbol{x_0}$ atunci, fiindcă $\boldsymbol{p - x_0}$ este impar, rezultă că clasa de resturi $\boldsymbol{\overline{-x_0}}$ este generată de numărul natural impar $\boldsymbol{p - x_0}$ și invers.

În așa mod obținem că clasele de resturi $\boldsymbol{\overline{x_0}}$ și $\boldsymbol{\overline{-x_0}}$ sunt diferite, prin urmare avem $\boldsymbol{x_0 \not\equiv -x_0(mod\, p)}$. Deoarece congruența (3) posedă gradul doi, rezultă că ea nu poate avea mai mult de două soluții, astfel ea are exact două soluții. Afirmația dată poate fi demonstrată, folosind și metoda contrariului.

Dacă presupunem că $\boldsymbol{x_0 \equiv -x_0(mod\, p)}$, atunci $\boldsymbol{2x_0 \equiv 0(mod\, p)}$ sau $\boldsymbol{x_0 \equiv 0(mod\, p)}$. Atunci $\boldsymbol{x_0^2 \equiv 0(mod\, p) \Leftrightarrow a \equiv 0(mod\, p) \Leftrightarrow (a, p) \neq 1}$ – contradicție.

Cunoaștem că există congruențe de forma (3) după un modul prim impar, care nu au soluții. De exemplu, $\boldsymbol{x^2 \equiv 3(mod\, 7)}$. Prin verificare nemijlocită se arată că nici una din clasele de resturi $\boldsymbol{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}}$ nu-s soluții ale acestei congruențe. Astfel există și congruențe incompatibile de forma (3).

Definiția 1. Numărul natural nenul $\boldsymbol{a}$ se numește rest pătratic după modulul prim $\boldsymbol{p > 2}$, dacă congruența (3) este compatibilă, iar în caz contrar, când congruența (3) este incompatibilă, $\boldsymbol{a}$ se numește nonrest pătratic.

Definiția 2. Clasa de resturi $\boldsymbol{\overline{a}}$, generată de restul pătratic $\boldsymbol{a}$ se numește clasă de resturi pătratice, iar clasa de resturi $\boldsymbol{\overline{a}}$, generată de nonrestul pătratic $\boldsymbol{a}$ se numește clasă de nonresturi pătratice.

Generalizând cele menționate mai sus, obținem următoarea descriere la compatibilitate a congruențelor de gradul doi peste un modul prim:

© Bordan Valeriu, 2022

Teoremă. Pentru congruența de gradul doi de forma (1) au loc:

1. Dacă $\boldsymbol{p = 2}$, atunci există 4 congruențe de gradul doi și anume:
   a) $\boldsymbol{x^2 + x + 1 \equiv 0(mod\ 2)}$- incompatibilă;
   b) $\boldsymbol{x^2 + x \equiv 0(mod\ 2)}$ – compatibilă, având două soluții $\{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$;
   c) $\boldsymbol{x^2 + 1 \equiv 0(mod\ 2)}$ – compatibilă, având o singură soluție $\{\overline{\mathbf{1}}\}$;
   d) $\boldsymbol{x^2 \equiv 0(mod\ 2)}$ – compatibilă, având o singură soluție $\{\overline{\mathbf{0}}\}$.
2. Dacă $\boldsymbol{p \neq 2}$, atunci există 3 tipuri de congruențe de gradul doi și anume:
   a) $\boldsymbol{x^2 \equiv 0(mod\ p)}$, compatibilă, având o singură soluție $\{\overline{\mathbf{0}}\}$;
   b) $\boldsymbol{x^2 \equiv a(mod\ p), a \neq 0}$, compatibile, având strict două soluții $\{\overline{x_0}, \overline{-x_0}\}$, dacă $\boldsymbol{a}$ este rest pătratic;
   c) $\boldsymbol{x^2 \equiv a(mod\ p)}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$, incompatibile, dacă $\boldsymbol{a}$ este nonrest pătratic.

În [1] sunt cercetate clasele de resturi și nonresturi pătratice după un modul prim și este arătat că numărul de clase de resturi pătratice coincide cu numărul de clase de nonresturi pătratice, fiind egal cu $\frac{p-1}{2}$. Iar clasele de resturi pătratice după modulul $\boldsymbol{p}$ sunt: $\overline{\mathbf{1^2}}, \overline{\mathbf{2^2}}, \overline{\mathbf{3^2}}, \dots, \overline{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$.

Evident că atunci celelalte $\frac{p-1}{2}$ clase de resturi nenule rămase după modulul $\boldsymbol{p}$ vor forma mulțimea claselor de nonrestuti pătratice după modulul dat.

Astfel, conform celor menționate mai sus, aflarea claselor de resturi și nonresturi pătratice este simplu de realizat și poate fi utilizată la determinarea compatibilității sau incompatibilității unei congruențe, fără a afla soluțiile acestei congruențe.

Exemplul 1. Arătați cu ajutorul nonresturilor pătratice, că congruența $\boldsymbol{x^2 \equiv 7(mod\ 17)}$ este incompatibilă.

Soluție. Aflăm mulțimea claselor de resturi pătratice după modulul 17.

Cum $\frac{p-1}{2} = \mathbf{8}$, rezultă că avem 8 clase de resturi pătratice și 8 clase de nonresturi pătratice după modulul 8.

Clasele de resturi pătratice sunt: $\overline{\mathbf{1^2}}, \overline{\mathbf{2^2}}, \overline{\mathbf{3^2}}, \overline{\mathbf{4^2}}, \overline{\mathbf{5^2}}, \overline{\mathbf{6^2}}, \overline{\mathbf{7^2}}, \overline{\mathbf{8^2}}$. Adică $\overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{9}}, \overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{8}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{15}}, \overline{\mathbf{13}}$. Astfel mulțimea claselor de resturi pătratice este $\boldsymbol{R_p} = \{\overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{8}}, \overline{\mathbf{9}}, \overline{\mathbf{13}}, \overline{\mathbf{15}}, \overline{\mathbf{16}}\}$. Rezultă că celelalte 8 clase de resturi diferite de clasa nulă, formează mulțimea claselor de nonresturi pătratice. Adică mulțimea claselor de nonresturi pătratice este $\overline{\boldsymbol{R_p}} = \{\overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{5}}, \overline{\mathbf{6}}, \overline{\mathbf{7}}, \overline{\mathbf{10}}, \overline{\mathbf{11}}, \overline{\mathbf{12}}, \overline{\mathbf{14}}\}$. Cum clasa de resturi $\overline{\mathbf{7}} \in \overline{\boldsymbol{R_p}}$, rezultă că numărul 7 este nonrest pătratic, prin urmare congruența dată este incompatibilă.

© Bordan Valeriu, 2022

Exemplul 2. Determinați câte soluții are congruența $\boldsymbol{x^2 \equiv 13(mod\ 17)}$ fără a o rezolva.

Soluție. Conform celor calculate în exemplul 1, numărul 13 este rest pătratic. Astfel congruența dată, conform descrierii din teoremă, este compatibilă și are 2 soluții.

Exemplul 3. Aflați care este cel mai mare număr natural rest pătratic și care este cel mai mic număr natural nonrest pătratic după modulul 23, cuprinse între 1 și 23. Determinați care din mulțimi are cel mai mare număr de elemente consecutive, mulțimea claselor de resturi pătratice sau cea a claselor de nonresturi pătratice?

Soluție. Aflăm clasele de resturi pătratice după modulul 23. Acestea sunt $\overline{\mathbf{1^2}}, \overline{\mathbf{2^2}}, \overline{\mathbf{3^2}}, \overline{\mathbf{4^2}}, \overline{\mathbf{5^2}}, \overline{\mathbf{6^2}}, \overline{\mathbf{7^2}}, \overline{\mathbf{8^2}}, \overline{\mathbf{9^2}}, \overline{\mathbf{10^2}}, \overline{\mathbf{11^2}}$. Efectuând calculele, obținem mulțimea

$$\boldsymbol{R_p} = \{\overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{9}}, \overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{13}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{18}}, \overline{\mathbf{12}}, \overline{\mathbf{8}}, \overline{\mathbf{6}}\} = \{\overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{6}}, \overline{\mathbf{8}}, \overline{\mathbf{9}}, \overline{\mathbf{12}}, \overline{\mathbf{13}}, \overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{18}}\}.$$

Atunci mulțimea claselor de nonresturilor pătratice după modulul dat are forma

$$\overline{\boldsymbol{R_p}} = \{\overline{\mathbf{5}}, \overline{\mathbf{7}}, \overline{\mathbf{10}}, \overline{\mathbf{11}}, \overline{\mathbf{14}}, \overline{\mathbf{15}}, \overline{\mathbf{17}}, \overline{\mathbf{19}}, \overline{\mathbf{20}}, \overline{\mathbf{21}}, \overline{\mathbf{22}}\}.$$

Astfel cel mai mare număr natural rest pătratic mai mic decât 23 este $\boldsymbol{a = 18}$. Iar cel mai mic număr natural nonrest pătratic este $\boldsymbol{b = 5}$. Comparând mulțimile claselor de resturi pătratice și nonresturi pătratice, observăm că ambele conțin maximal câte 4 elemente/clase consecutive. Mulțimea $\boldsymbol{R_p}$ conține submulțimea de elemente consecutive $\{\overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{4}}\}$, iar mulțimea $\overline{\boldsymbol{R_p}}$ conține submulțimea elementelor consecutive $\{\overline{\mathbf{19}}, \overline{\mathbf{20}}, \overline{\mathbf{21}}, \overline{\mathbf{22}}\}$.

Bibliografie

1. CIOCANU, GH.; GOIAN, I.; MARIN, V. *Teoria numerelor*. Chișinău: CEP USM, 2013. 131 p. ISBN 978-9975-71-394-8.
2. HAJDEU, M.; BORDAN, V. Despre idealele inelului $T_2(Z_2)$. În: *Materialele conferinței științifice a studenților*. Ediția LXVII. Chișinău: UST, 2018. pp.118-120. ISBN 978-9975-76-246-5.
3. MINUȚ, P. *Teoria numerelor*. Volumul I. Iași: Editura Crenguța Gâldău, 1997. 183 p.
4. КАЗАЧЕК, Н.; ПЕРЛАТОВ, Г.; ВИЛЕНКИН, Н.; БОРОДИН, А. *Алгебра и теория чисел*. Москва: МГЗПИ, Просвещение, 1984. 193 с.
5. ВИНОГРАДОВ, И. *Основы теории чисел*. Москва: Наука, 1972. 168 с.

© Bordan Valeriu, 2022

CZU: 371.388:519.17+378.147

APLICAREA TESTULUI (U) MANN-WHITNEY LA PRELUCRAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE PRIVIND STUDIEREA CURSULUI UNIVERSITAR „TEORIA GRAFURILOR”

Marina BOSTAN
Universitatea de Stat din Tiraspol
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”
e-mail: marinocika83@mail.ru

Rezumat. În lucrare este descris desfășurarea experimentului pedagogic privind procesul de implementare a tehnologiilor informaționale la studierea cursului universitar ”Teoria Grafurilor”. Sunt examinate etapele de prelucrare statistică a datelor experimentale prin intermediul utilizării testului (U) Mann-Whitney.
Cuvinte cheie: experiment pedagogic, testul (U) Mann-Whitney, nivelul de semnificație, teoria grafurilor.

Abstract. The paper describes the development of the pedagogical experiment regarding the implementation process of information technologies when studying the university course "Graph Theory". The stages of statistical processing of the experimental data are examined through the use of the Mann-Whitney (U) test.
Keywords: pedagogical experiment, (U)Mann-Whitney test, significance level, graph theory.

1. Descrierea cercetării pedagogice privind implementarea noilor tehnologii informaționale în procesul de predarea cursului universitar „Teoriei grafurilor”

Experimentul pedagogic este o metodă principală de investigație pedagogică directă, care are drept scop optimizarea procesului pedagogic urmărind fie ameliorarea unor soluții instructiv educative, fie descoperirea altor soluții noi, calitativ superioare, mai moderne și mai eficiente [1, 2].

Printr-un experiment pedagogic, pedagogia modernă a învățământului superior înțelege o metodă de cercetare care este utilizată pentru a determina eficacitatea utilizării metodelor și mijloacelor individuale de predare și educație. Implementarea noilor tehnologii informaționale în procesul de predare-învățare-evaluare facilitează calea spre finalitățile determinate de obiectivele pe care profesorul și le planifică pentru o anumită componentă structurală de învățare.

În cadrul cercetării noastre a fost organizat și realizat un experiment pedagogic în procesul predării cursului universitar „Teoria grafurilor”.

Teoria grafurilor are o mare importanță practică, întrucât prin o serie de probleme legate de transport, turism, economie, logistică, fizică, biologie, chimie ș.a. sunt rezolvate cu ajutorul algoritmilor și metodelor acestei teorii. Luând în considerație provocările

© Bostan Marina, 2022

tehnologice din ultima perioadă, evident, este necesar să se schimbe accentele și paradigmele privind studierea Teoriei Grafurilor în instituțiile superioare de învățământ [1-8].

În proiectarea unui experiment pedagogic privind implementarea noilor tehnologii în predarea „Teoriei grafurilor”, a fost aplicată o abordare TIC, care implică:

- implementarea platformelor educaționale online – opensource: campion.edu.ro, graphonline.ru;
- implementarea softului matematic Maple18;
- elaborarea și implementarea programelor în limbajele de programare Pascal/C++;
- conținuturile și sarcinile cursului plasate pe platforma educațională moodle.upsc.md.

2. Verificarea eficacității modelului pedagogic

Experimentul pedagogic a fost realizat pe parcursul anilor 2016-2020, cu studenții din anul I, specialitatea Informatică, Informatică și Matematică, Matematică și Informatică, din Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” și Universitatea de Stat din Tiraspol. În experimentul pedagogic au fost implicați în total 181 de studenți.

Grupul experimental (SGE) a inclus studenții de la Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” – 96 de studenți: anul universitar 2016-2017 – 29 de persoane; anul universitar 2017-2018 – 27 de persoane, anul universitar 2018-2019 – 25 de persoane și anul universitar 2019-2020 – 15 de persoane.

Grupul de control (SGC) a inclus studenții de la Universitatea de Stat din Tiraspol – 85 de studenți: anul universitar 2016-2017 – 26 de persoane; anul universitar 2017-2018 – 19 de persoane, anul universitar 2018-2019 – 16 de persoane și anul universitar 2019-2020 – 24 de persoane.

3. Evaluarea importanței rezultatelor experimentului pedagogic conform testului (U)Mann-Whitney

Testul (U) Mann-Whitney este un test statistic folosit pentru a evalua diferențele dintre două eșantioane independente în ceea ce privește nivelul oricărei trăsături, măsurat cantitativ. Testul permite detectarea diferențelor de valoare a unui parametru între eșantioane mici. Această metodă de detectare a diferențelor dintre probe a fost propusă în 1945 de Frank Wilcoxon (*F. Wilcoxon*). În 1947 a fost revizuit și extins substanțial de H. B. Mann (*H. B. Mann*) și D. R. Whitney (*D. R. Whitney*), sub ale cărui nume este de obicei numit astăzi.

Să verificăm rezultatele experimentului pedagogic folosind testul neparametric (U) Mann-Whitney.

Condițiile pentru a aplica testul respectiv ține de următoarele:

© Bostan Marina, 2022

1. Fiecare dintre eșantioane trebuie să conțină cel puțin 3 valori caracteristice. Este permis ca într-o probă să fie două valori, dar în a doua să fie cel puțin cinci.
2. Nu ar trebui să existe valori de potrivire în datele eșantionului (toate numerele sunt diferite) sau ar trebui să existe foarte puține astfel de potriviri.
3. Distribuția normală a observațiilor nu este obligatorie să se îndeplinească.

Formulăm ipotezele:

- H_0: rezultatele învățării în SGE și SGC nu diferă statistic unele de altele.
- H_1: rezultatele învățării în SGE și SGC sunt statistic diferite.

Valorile empirice ale testului (U) Mann-Whitney au fost calculate folosind relația:

$$U_i = n_1 * n_2 + \frac{n_i(n_i+1)}{2} - R_i \quad (1)$$

unde R_i este suma rangurilor pentru eșantionul i; n_1 și n_2 sunt numărul de observații din grupele SGE și SGC.

Valorile critice ale testului (U) Mann-Whitney $U_p(n_1, n_2)$ sunt identificate după tabelele din sursa [7, p. 316] pentru n_1 și n_2 iar nivelurile de semnificație p=0,01 și p=0,05 sunt descrise în Tabelul 1.

Valorile critice ale criteriului (U) Mann-Whitney sunt determinate pentru nivelurile de semnificație $\rho \leq 0{,}05$ $şi$ $\rho \leq 0{,}01$. Diferențele dintre două observații pot fi considerate semnificative ($\rho < 0{,}05$), dacă $U_{emp} \leq U_{0{,}05}$, și cu atât mai credibile ($\rho < 0{,}01$), dacă $U_{emp} \leq U_{0{,}01}$.[7, p.316].

Testul (U) Mann-Whitney, spre deosebire de majoritatea celorlalte criterii, presupune că diferențele statistice sunt semnificative dacă valoarea empirică (U_{emp}) este mai mică decât valoarea critică (U_{crit}), adică, ipoteză nulă H_0 despre nesemnificația statistică a diferențelor dintre valorile medii din două eșantioane este acceptată la nivelul de semnificație p dacă $U_{emp}>U_{crit}$. Și, invers, ipoteza alternativă H_1 despre semnificația statistică a diferențelor dintre valorile medii din două eșantioane este acceptată la nivelul de semnificație p dacă $U_{emp}<U_{crit}$ [6].

Datele au fost colectate și prelucrate statistic în aplicația SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) [3, 4]. Rezultatele calculării testului (U) Mann-Whitney pentru patru serii ale experimentului de formare sunt prezentate în Tabelul 1.

1) Anul 2016-2017

$$U_1 = 29 \cdot 26 + \frac{29 \cdot 30}{2} - 928{,}5 = 754 + 435 - 928{,}5 = 260{,}5.$$

2) Anul 2017-2018

$$U_1 = 27 \cdot 19 + \frac{27 \cdot 28}{2} - 711{,}5 = 513 + 378 - 711{,}5 = 179{,}5.$$

3) Anul 2018-2019

$$U_1 = 25 \cdot 16 + \frac{25 \cdot 26}{2} - 594{,}5 = 400 + 325 - 598{,}5 = 126{,}5.$$

© Bostan Marina, 2022

4) Anul 2019-2020

$$U_1 = 15 \cdot 24 + \frac{15 \cdot 16}{2} - 401 = 360 + 120 - 401 = 79.$$

$$U_2 = 24 \cdot 15 + \frac{24 \cdot 25}{2} - 379 = 360 + 300 - 379 = 281.$$

Tabelul 1. Criteriul Mann-Whitney pentru eșantioanele experimentului

Anul	Eșantion	Numărul studenților	U_{emp}	$U_{0,05}$	$U_{0,01}$	Semnificația p	Ipoteza acceptată
2016-2017	SGE	n_1=29	260,5	**278**	**238**	0,049	H_1
	SGC	n_2=26					
2017-2018	SGE	n_1=27	179,5	**182**	**151**	0,084	H_1
	SGC	n_2=19					
2018-2019	SGE	n_1=25	126,5	**137**	**112**	0,049	H_1
	SGC	n_2=16					
2019-2020	SGE	n_1=15	79,0	**122**	98	0,003	H_1
	SGC	n_2=24					
Total		**181**					

Analizând datele din tabelul 1, vedem că în fiecare serie a experimentului formativ ipoteza H_1 este confirmată. Acest lucru este evidențiat de $U_{emp}<U_{crit}$ obținut în fiecare serie.

Conform rezultatelor testelor finale al anului de studii universitar 2016-2017, se stabilește că $U_{emp} = 260{,}5 \leq 278 = U_{0,05}\,(29; 26)$, adică ipoteza H_0 este respinsă și este acceptată ipoteza alternativă H_1 cu nivelul de semnificație $\rho = 0{,}049$, indică existența unor diferențe semnificative din punct de vedere statistic între scorul mediu din SGE și SGC.

Pe baza rezultatelor testelor finale al anului de studii universitar 2017-2018, se stabilește că $U_{emp} = 179{,}5 \leq 182 = U_{0,05}\,(27; 19)$, adică ipoteza H_0 este respinsă și este acceptată ipoteza alternativă H_1 cu nivelul de semnificație $\rho = 0{,}084$, indică existența unor diferențe semnificative din punct de vedere statistic între scorul mediu din SGE și SGC.

Pe baza rezultatelor testelor finale al anului de studii universitar 2018-2019, se stabilește că $U_{emp} = 126{,}5 \leq 137 = U_{0,05}\,(25; 16)$, adică ipoteza H_0 este respinsă și este acceptată ipoteza alternativă H_1 cu nivelul de semnificație $\rho = 0{,}049$, indică existența unor diferențe semnificative din punct de vedere statistic între scorul mediu din SGE și SGC.

Pe baza rezultatelor testelor finale al anului de studii universitar 2019-2020, se stabilește că $U_{emp} = 79{,}0 \leq 98 = U_{0,01}\,(15; 24)$, adică ipoteza H_0 este respinsă și este acceptată ipoteza alternativă H_1 cu nivelul de semnificație $\rho = 0{,}003$, indică existența

© Bostan Marina, 2022

unor diferențe semnificative din punct de vedere statistic între scorul mediu din SGE și SGC.

Se poate concluziona că nivelul de formare (scorul mediu) din SGE este statistic semnificativ mai mare decât nivelul de formare în SGC la nivelul de semnificație $p = 0,05$ în fiecare serie a experimentului formativ (Figura 1).

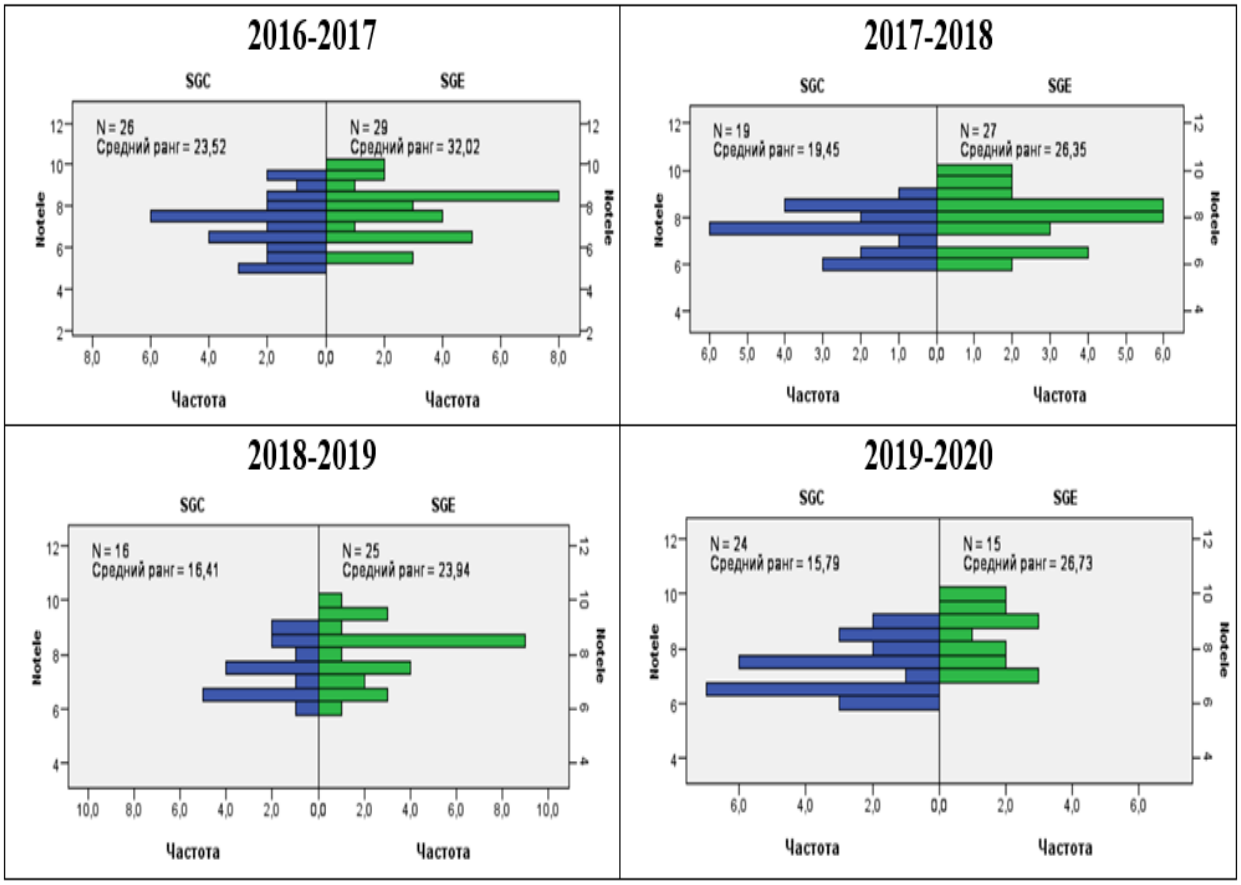


Figura 1. Valorile testelor (U)Mann-Whitney în patru serii

4. Concluzii

Experimentul pedagogic, realizat a permis sintetizarea următoarelor concluzii în baza analizei statistice efectuate:

- s-a demonstrat eficiența modelului pedagogic, axat pe valorificarea tehnologiilor interactive în procesul de studiu al cursului universitar „Teoria Grafurilor” și a metodologiei de implementare prin înregistrarea de rezultate mult mai eficiente în eșantioanele experimentale comparativ cu eșantioanele de control;
- s-a demonstrat că implementarea modelului pedagogic elaborat este centrat pe integrarea tehnologiilor informaționale interactive în procesul de studiu la cursul respectiv care a contribuit la înregistrarea unei tendințe de creștere a performanțelor academice pentru studenții din eșantioanele experimentale în comparație cu eșantioanele de control;

© Bostan Marina, 2022

- s-a identificat dependența directă dintre metodele didactice interactive cu integrarea în procesul de studii a tehnologiilor informaționale interactive și creșterea gradului de pregătire al studenților la cursul universitar „Tehnologii informaționale și comunicaționale”.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. ANIȚEI, M. *Psihologie experimentală*. Iași: Editura Polirom, 2007. 400 p.
2. DUMITRIU, C. *Introducere în cercetarea psihopedagogică*. Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, R.A., 2004. 230 p.
3. LABĂR, A.V. *SPSS pentru științele educației*. Iași: Polirom, 2008. 347 p.
4. PAVEL, M. Utilizarea aplicației SPSS la prelucrarea datelor experimentale obținute în cercetarea pedagogică privind impactul TIC asupra formării inițiale a învățătorilor. În: *Mathematics & Information Technologies: Research and Education* (MITRE-2015), iulie 2-5. Chișinău, 2015. p. 117. ISBN 978-9975-71-678-9.
5. URBACH, V. Y. *Analiza statistică în cercetarea biologică și medicală*. Moscova: Meditsina, 1975. 297 p.
6. БОГДАНОВА, В. А. Методология обработки педагогической информации с помощью критериев ϕ*-углового преобразования Фишера и U-Манна-Уитни. În: *Univers Pedagogic*, 2021. Nr. 3 (71), p. 56-63.
7. СИДОРЕНКО, Е.В. *Методы математической обработки в психологии*. С.-Пб.: ООО «Речь», 2000. 350 с.

© Bostan Marina, 2022

CZU: 316.324:004+371.14:371.124:51

COMUNITATEA DIGITALĂ – MEDIU DE FORMARE PROFESIONALĂ CONTINUĂ A PROFESORILOR DE MATEMATICĂ

Andrei BRAICOV
Universitatea de Stat din Tiraspol, Republica Moldova
e-mail: abraicov@gmail.com

Rezumat. În articol este studiat rolul comunităților profesionale digitale pentru formarea profesională continuă a cadrelor didactice de matematică. Analiza caracteristicilor și funcționalităților acestor comunități sugerează că ele reprezintă un instrument eficient pentru autodezvoltarea profesională a cadrelor didactice de matematică, pentru comunicarea și colaborarea cu colegii de breaslă, pentru conceperea și dezbaterea ideilor, proiectelor, parteneriatelor, ceea ce constituie în mare parte obiectivele specifice din aria *Angajament profesional* a cadrului european DigCompEdu.
Cuvinte-cheie: comunitate profesională digitală, dezvoltare profesională.

Abstract. The article studies the role of digital professional communities for the continuous professional training of mathematics teachers. The analysis of the characteristics and functionalities of these communities suggests that they represent an effective tool for the professional self-development of mathematics teachers, for communication and collaboration with colleagues, for the conception and debate of ideas, projects, partnerships, which are mostly the elementary objectives of the Professional Engagement area of the European DigCompEdu framework.
Keywords: digital professional community, professional development.

Preliminarii

Tradițional formarea noilor abilități profesionale ale cadrelor didactice este „lăsată” în grija centrelor de formare profesională continuă. În ultimii ani, inspirați și forțați de evoluția tehnologiilor, deseori profesorii își asumă creșterea competenței profesionale prin autodezvoltare. Ambele modalități au reușit să se afirme prin exemple de bune practici și impacturi constatate prin numeroase studii și statistici ([1] – [4]).

Totuși, necesitatea trecerii rapide către învățarea la distanță a scos la iveală un șir de probleme, inclusiv legate de nivelul scăzut al competenței digitale a elevilor și profesorilor, inclusiv de matematică, ceea ce sugerează completarea arsenalului de metode pentru învățarea continuă.

Se pare că a fost ignorat un instrument, care tocmai în momente de criză funcționează cu randament optimal – comunitatea profesională digitală (CPD).

Comunitățile digitale sunt grupuri de oameni cu interese comune care socializează digital.

În continuare vom vedea de ce CPD este un instrument eficient de formare, cum ne asociem la ea sau cum creăm o comunitate digitală, dar și care sunt problemele și riscurile legate de aceste comunități.

© Braicov Andrei, 2022

Caracteristicile și avantajele unei CPD educaționale

Capacitatea digitală în educația matematică reprezintă mulțimea abilităților și atitudinilor necesare profesorilor și instituțiilor educaționale pentru a organiza un proces instructiv modern și eficient la matematică.

Să observăm că digitalizarea educației matematice implică atât factorul uman, cât și mediul în care se desfășoară procesul de livrare a educației matematice. În raport cu instituția de învățământ termenii *abilități* și *atitudini* își extind semnificația, însumând cerințe tehnice, tehnologice, logistice, dar și cerințe de ordin conceptual.

Sigur, capacitatea digitală a profesorului de matematică include totalitatea abilităților și atitudinilor componente ale competenței digitale ale cadrelor digitale. Acestea sunt definite în DigCompEdu [5] – Cadrul european pentru competența digitală a profesorilor. Cele 22 de competențe specifice sunt cuprinse în 6 arii:

1. Angajamentul profesional;
2. Resurse digitale;
3. Predare și învățare;
4. Evaluare;
5. Extinderea posibilităților de învățare ale elevilor/studenților;
6. Facilitarea competenței digitale a elevilor/studenților.

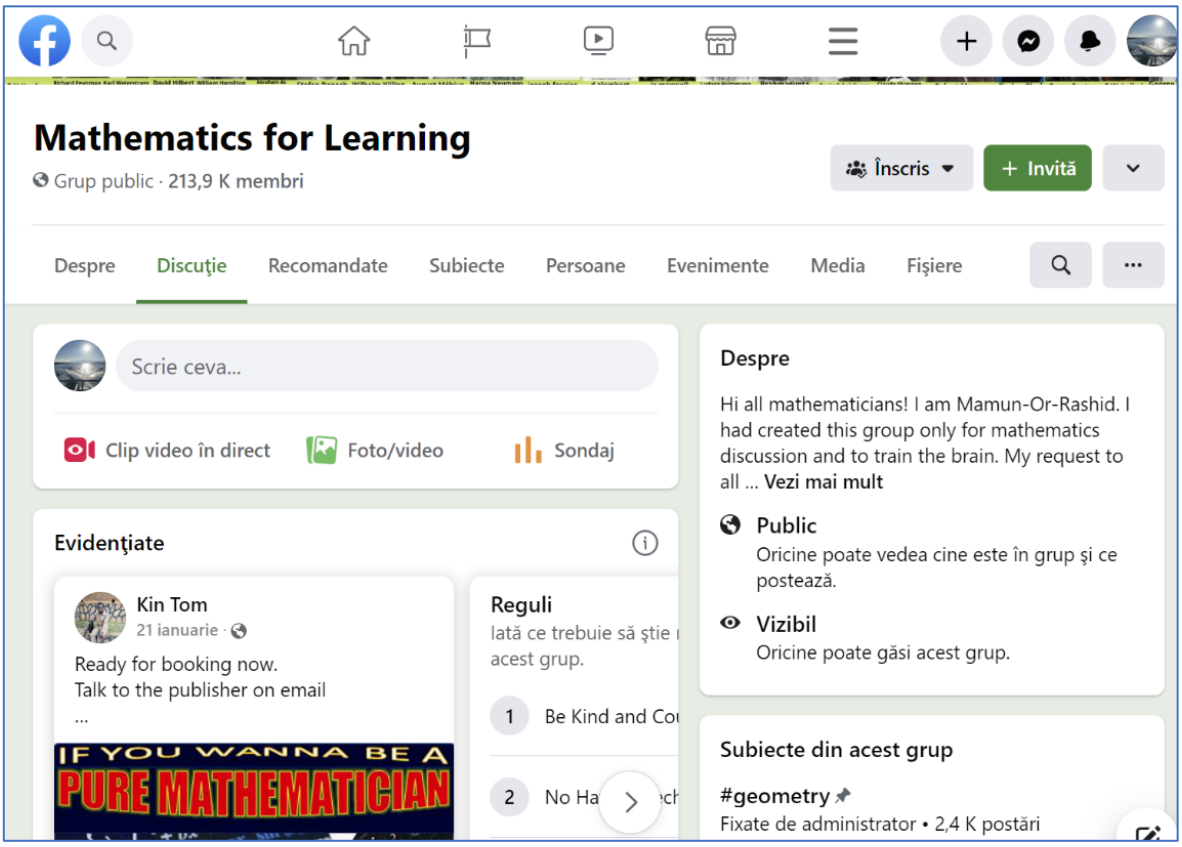


Figura 1. CPD public pe Facebook
„Mathematics for Learnig" – circa 213 900 membri

Atragem atenția că *angajamentul profesional*, inclusiv al profesorului de matematică, presupune valorificarea tehnologiilor digitale pentru fortificarea comunicării, colaborării cu colegii, experții din domeniu, elevii, părinții, dar și pentru stimularea autoinstruirii, a creșterii profesionale continue.

Unele dintre cele mai eficiente instrumente de comunicare, colaborare și dezvoltare profesională, îndeosebi pentru profesorii de matematică, sunt comunitățile profesionale digitale (CPD). Rețelele sociale (de ex., Facebook, Tweeter, Linkedin, Discourse) oferă posibilitatea creării grupurilor/comunităților digitale profesionale.

De regulă, o CPD permite:

- ✓ socializarea (asincronă, mai rar și sincronă) între membri prin intermediul chat-ului, forum-urilor;
- ✓ planificarea și diseminarea evenimentelor;
- ✓ crearea e-repozitoriilor comune de documente, imagini și resurse audio/video;
- ✓ administrarea comunității (prin acceptarea sau eliminarea membrilor);
- ✓ partajarea resurselor tuturor membrilor.

O CPD educațională, în afară de cele menționate, oferă posibilitatea:

- ✓ promovării experienței pedagogice;
- ✓ diseminării resurselor calitative de învățare;
- ✓ colectării rapide a opiniilor vis-a-vis de problemele din Educație (fig. 2);
- ✓ găsirii soluțiilor optime pentru un șir de provocări profesionale;
- ✓ producerea în comun a resurselor educaționale digitale etc.

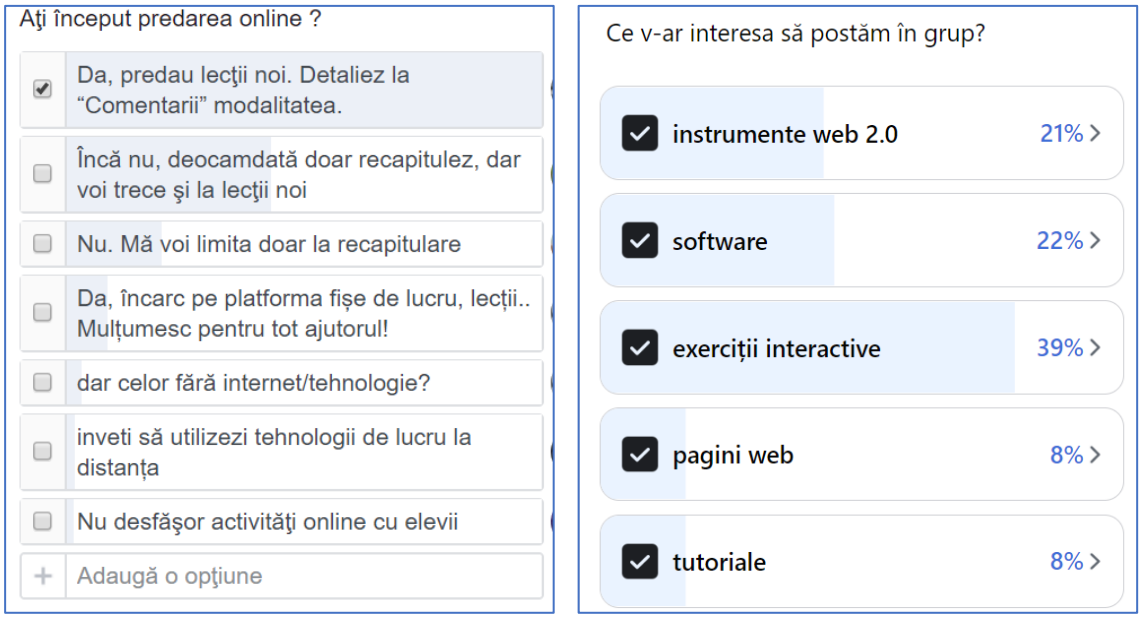


Figura 2. Sondaje de opinie

CPD pentru formarea profesională a cadrelor didactice de matematică

Căutarea și aderarea la o CPD de matematică este lejeră din punct de vedere tehnic. Totuși pentru a face o alegere mai potrivită, ar fi bine de ținut cont de următoarele aspecte:

- CPD corespunde domeniului de interese (nivel de școlaritate, dificultate, limbă de comunicare);
- CPD are un feedback bun (poate fi identificat analizând forumurile);
- sunt asigurate drepturile de autor, eventual confidențialitatea, securitatea datelor cu caracter personal;
- comunitatea este funcțională, dens activă: se va atrage atenția la numărul total de membri, numărul postărilor pe zi (fig. 3) și calitatea lor;
- conținuturile și interacțiunile din CPD deja existente corespund așteptărilor;
- există transparență și încredere în comunitate;
- comunitatea este focusată pe cele mai importante probleme ale membrilor săi;
- discuțiile în comunitate sunt bilaterale (ele contribuie la creșterea implicării și a valorii CPD).

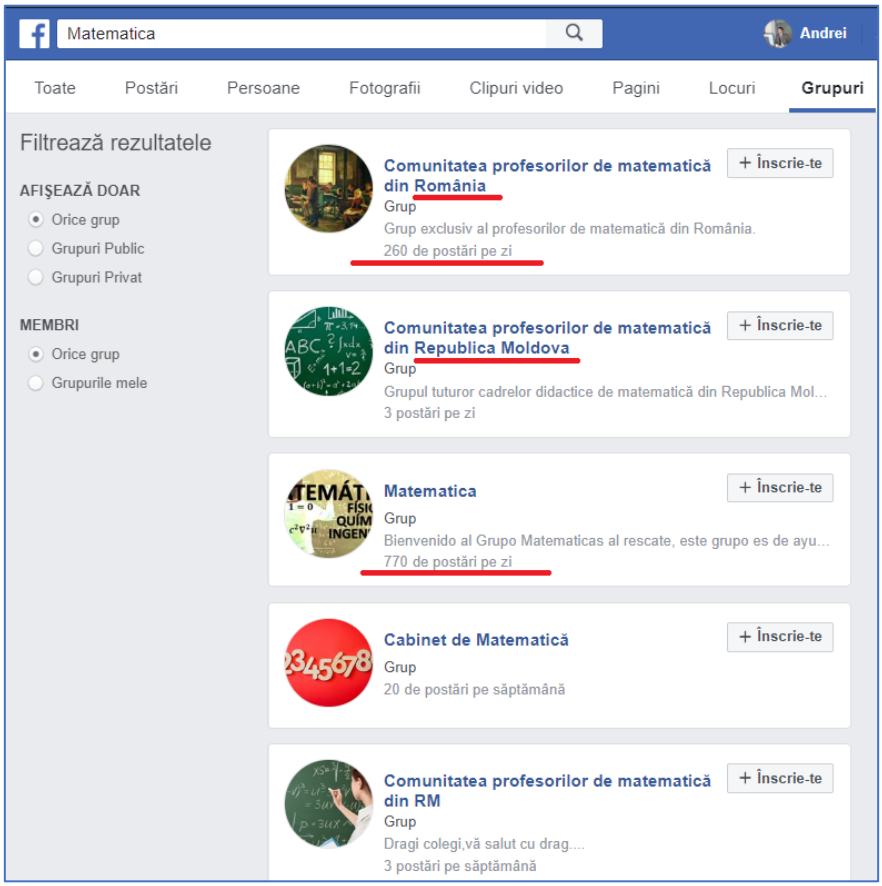


Figura 3. Căutarea unei CPD de matematică

De regulă, rețelele de socializare oferă opțiuni care permit căutarea CPD după cuvinte-cheie și tip de acces (public sau privat).

© Braicov Andrei, 2022

În cazul identificării grupurilor digitale pentru educația matematică se vor folosi cuvintele cheie „matematică”, „profesori de matematică” etc.

Cererea de aderare la o CPD, îndeosebi la cele private, poate include o etapă de chestionare a candidatului, care, de regulă, are scopul de a asigura o primă selecție doar a potențialilor membri corespunzător comunității, dar și a identificării categoriilor acestora (fig. 4).

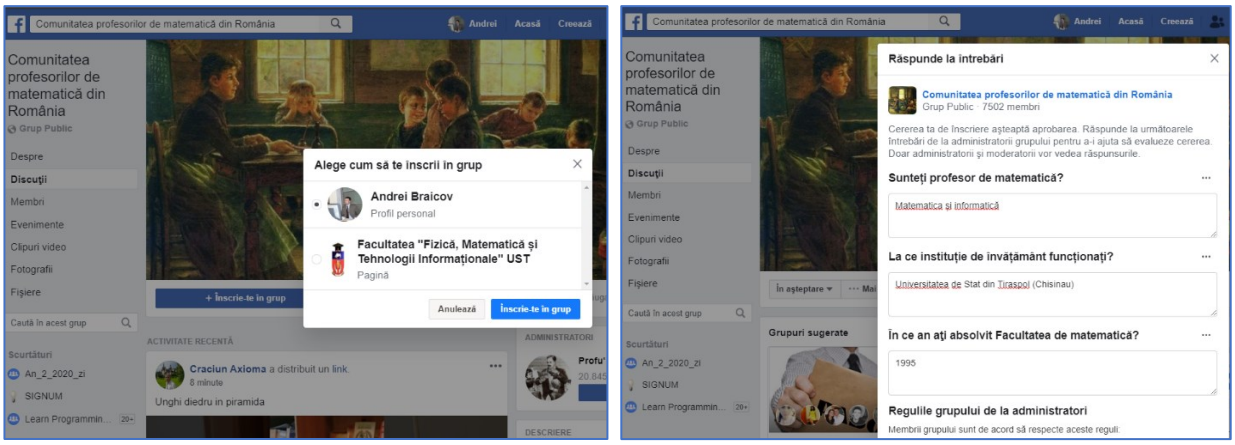


Figura 4. Aderarea la o CPD de matematică

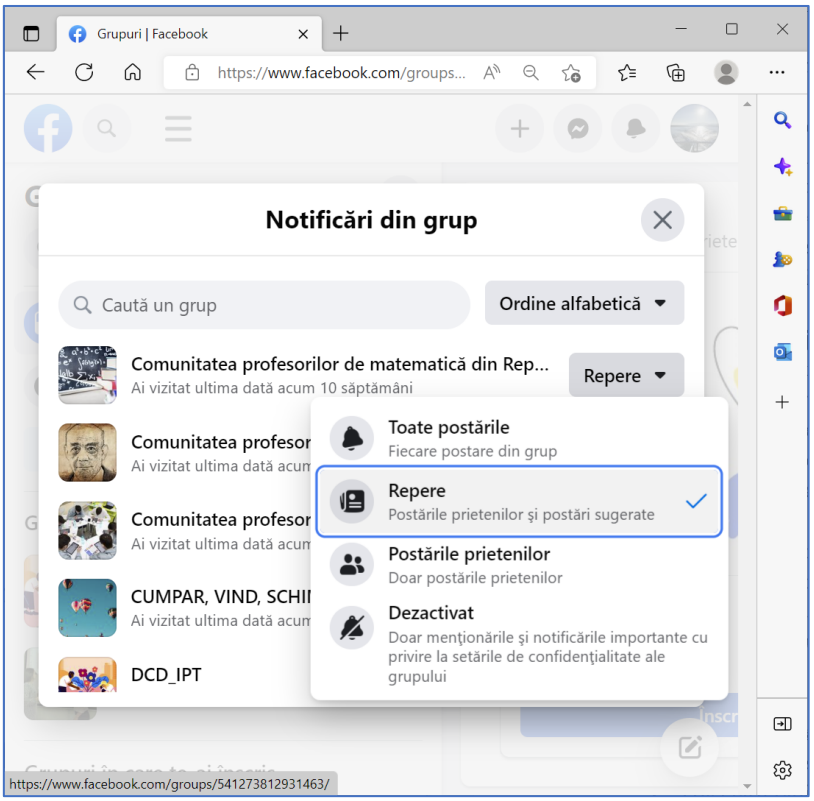


Figura 5. Aderarea la o CPD de matematică

Există CPD de matematică cu sute de mii de membri (fig. 1, 8, 9). Evident, profesorul de matematică, fiind membru al mai multor comunități digitale, ar putea fi asaltat de sute

© Braicov Andrei, 2022

de postări zilnice, pe care ar fi complicat să le examineze. Notificările parvenite de la comunități (grupuri) pot fi gestionate prin indicarea priorității lor sau chiar prin dezactivarea temporară a celor din anumite grupuri (fig. 5).

În același timp postările comunității pot fi grupate pe subiecte. CPD pentru profesorii de matematică permit distribuirea resurselor educaționale (fig. 6) sub formă de: fișiere-documente; imagini; resurse video etc.

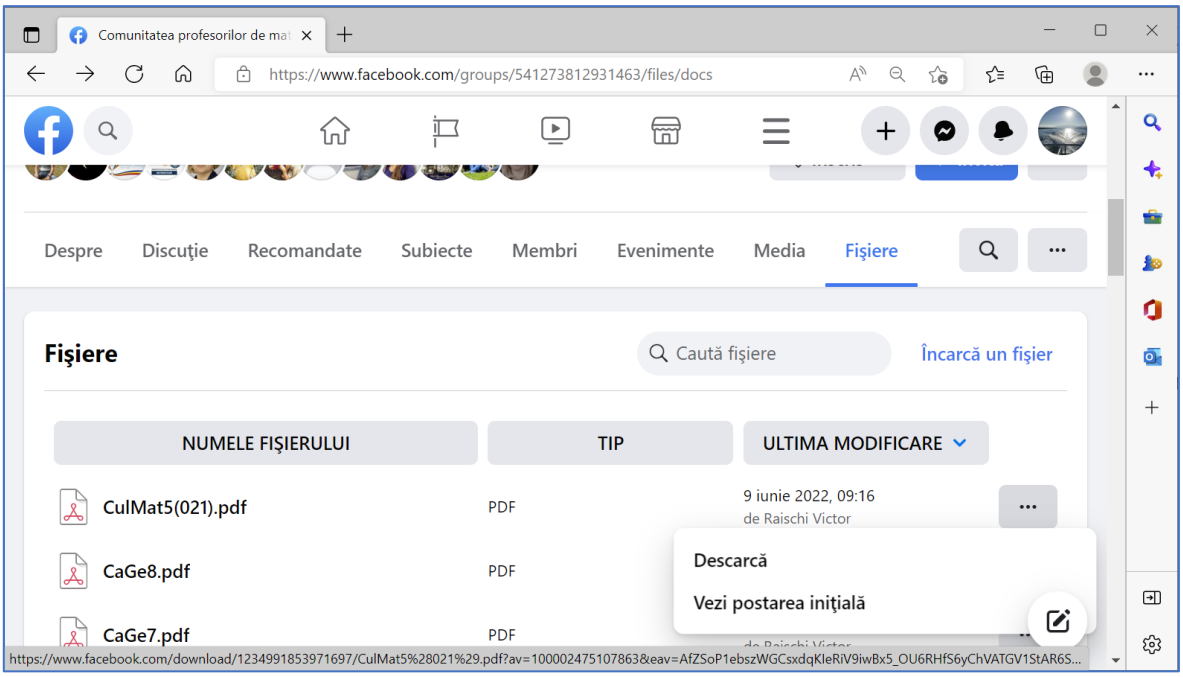


Figura 6. Distribuirea resurselor digitale prin CPD

În afară de conținuturi educaționale, membrii CPD pot crea și distribui sondaje, chestionare, evenimente sincrone (de exemplu, sesiuni video), întâlniri (în locații și perioade de timp exacte), articole (fig. 7).

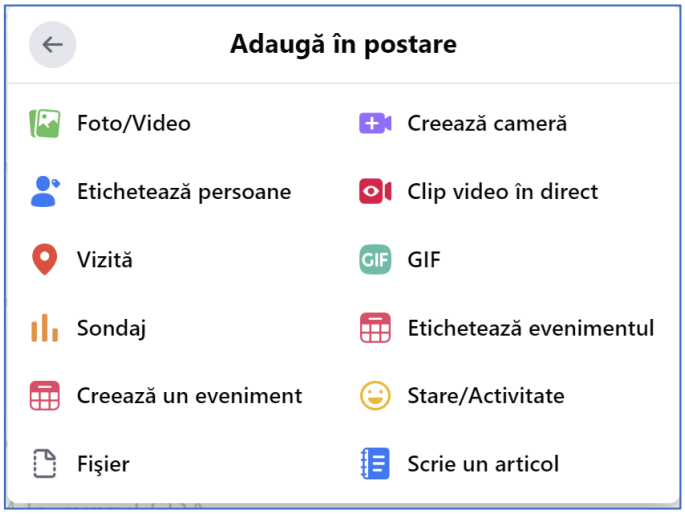


Figura 7. Tipuri de postări într-o CPD Facebook

© Braicov Andrei, 2022

Cele mai mari (ca număr de membri) CPD de matematică sunt organizate pe rețeaua Facebook (fig. 8). Unele au peste 500 000 de membri și peste 4000 de postări lunare (fig. 9).

Rețeaua *Comunitatea profesorilor de matematică din România* are peste 10 000 de membri și circa 200 de postări lunare.

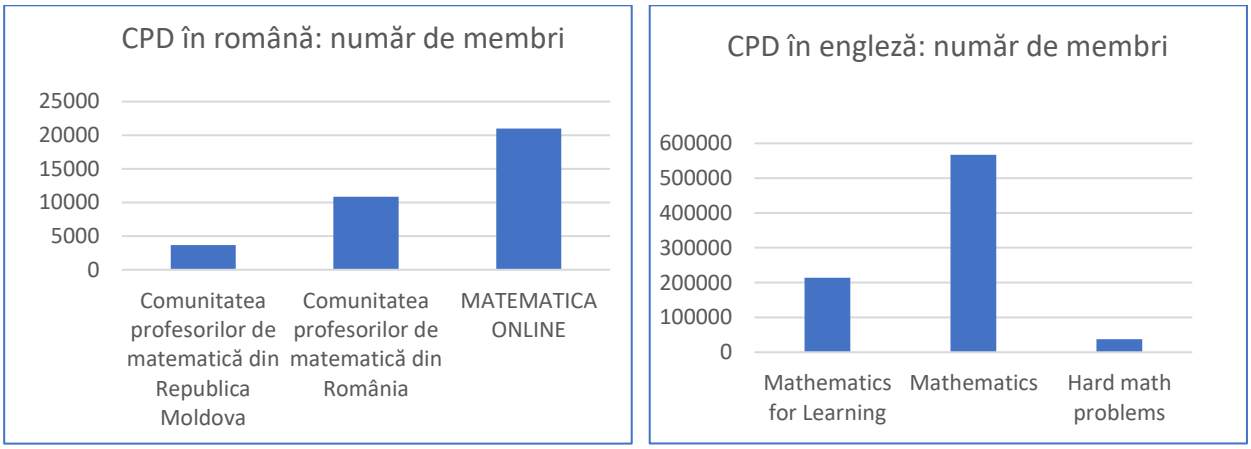


Figura 8. Cele mai mari 3 CPD de matematică în română și engleză: număr de membri

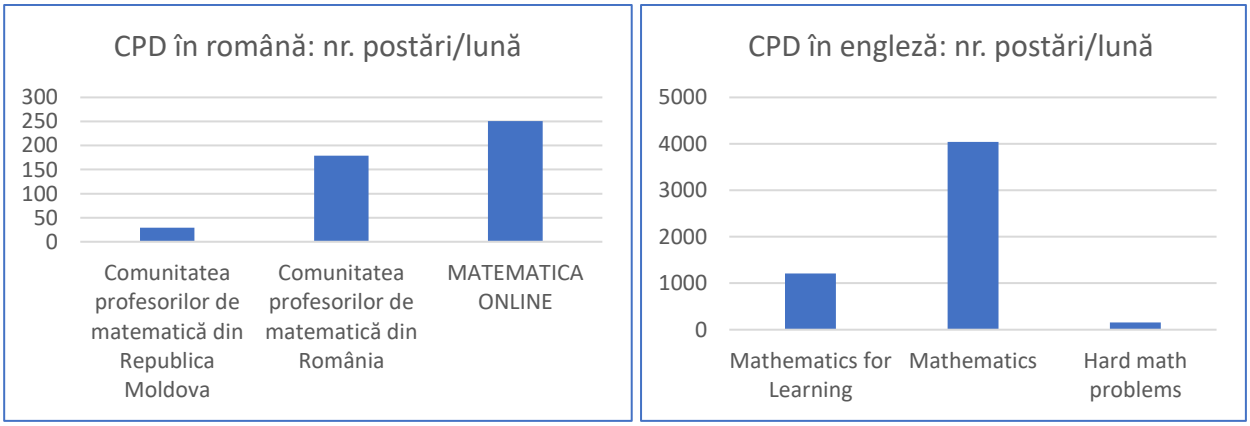


Figura 9. Cele mai mari 3 CPD de matematică în română și engleză: număr de postări pe lună

Analizând mai mult sondaje de opinie, discuții, postări din CPD de matematică, putem afirma că membrii acestor comunității sunt interesați preponderent de exerciții și probleme interesante, îndeosebi interactive, teste, informații despre software-uri de matematică și despre instrumente digitale care ar facilita educația matematică, precum și referințe către tutoriale de matematică menite să stimuleze autoînvățarea ghidată.

Majoritatea conținuturilor distribuite în CPD de matematică sunt imagini și secvențe video (fig. 10). Documentele (manuale, ghiduri, îndrumare, culegeri de probleme, culegeri de teste, prezentări) sunt distribuite sub formă de fișiere PDF, Word și PPT.

© Braicov Andrei, 2022

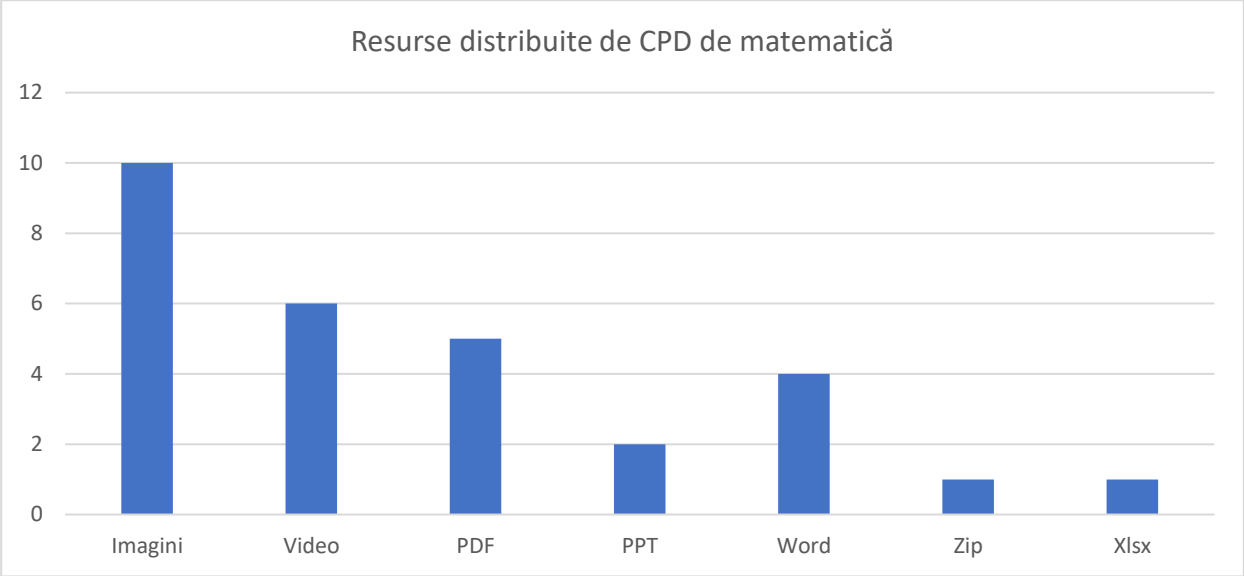


Figura 10. Tipuri de resurse distribuite de cele mai mari 10 rețele de CPD de matematică

Pe lângă avantaje, CPD supune societatea profesorilor de matematică și anumitor **riscuri**. Acestea se referă la:

- plagiatul de resurse de învățare;
- promovarea unor resurse educaționale neexpertizate;
- distribuirea neautorizată a datelor cu caracter personal;
- încălcarea drepturilor de autor;
- monopolizarea cu conținuturi de promovare, reclame;
- „supra-popularea" comunității cu postări „ieftine";
- imparțialitate în dezbaterea subiectelor de politici educaționale etc.

Sigur, într-o anumită măsură, conținuturile educaționale pot fi verificate înainte de postare de către administratorii CPD. De exemplu, CPD *Comunitatea profesorilor de matematică din Republica Moldova* este privată și este gestionată de către 4 administratori (https://www.facebook.com/groups/541273812931463).

Concluzii

Analiza caracteristicilor și funcționalităților CPD de matematică sugerează că acestea reprezintă un instrument eficient pentru autodezvoltarea profesională a cadrelor didactice de matematică, pentru comunicarea și colaborarea cu colegii de breaslă, pentru conceperea și dezbaterea ideilor, proiectelor, parteneriatelor, ori ele toate corespund în mare parte obiectivelor specifice din aria *Angajament profesional* a cadrului european DigCompEdu.

În același timp, constatăm că deocamdată nu există suficiente cercetări referitoare la acest subiect. În particular, prezintă interes răspunsurile la următoarele întrebări:

© Braicov Andrei, 2022

- ✓ Cum contribuie CPD la dezvoltarea competenței digitale a profesorului de matematică per ansamblu? Dar la dezvoltarea altor competențe profesionale?
- ✓ Există diferențe de nivel al capacității digitale a profesorilor de matematică care sunt membri CPD comparativ cu cei care nu sunt membri?
- ✓ Ce arhitectură ar trebui să aibă o CPD de matematică, astfel încât să aibă un randament maximal în dezvoltarea profesională a profesorului de matematică?

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. RUTKAUSKIENĖ, D.; BRAICOV, A.; CORLAT, S. ș. a. *ICT enhanced learning*. Monograph /Eds.: Danguole Rutkauskiene, Oleksandr Suk, Daina Gudoniene. Kharkiv : Planeta print, 2017. 309 p. ISBN: 9786177229734
2. CORLAT, S.; KARLSSON, G.; BRAICOV, A.; STAH, D.; HELLSTRÖM, M. *Metodologia utilizării Tehnologiilor Informaționale şi de Comunicație în Învăţămîntul superior*. Chișinău: Tipografia Centrală, 2012. 204 p. ISBN 978-9975-76-070-6.
3. BRAICOV, A. Competența de creare a conținuturilor digitale educaționale de către profesorii de matematică. CAIM 2019. *Proceedings of the 27th Conference on Applied and Industrial Mathematics. Communications in Education. Targoviste*, September 19-22, 2019. p. 22-28. ISBN 978-9975- 76-282-3.
4. BRAICOV, A.; SALI, L.; PAVEL, M. Modelul de formare profesionala continuă asistată de calculator a profesorilor de matematică și informatică. În: *The XXVth Conference on Applied and Industrial Math., CAIM-2018, Book of Abstracts*, 20th - 23th September, 2018. Technical University of Moldova, Chişinău, p. 120 – 121.
5. EU Framework for the Digital Competence of Educators (DigCompEdu), 2017: https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC107466

© Braicov Andrei, 2022

CZU: 514.112.3:514.112.6

RESTABILIREA TRIUNGHIULUI, FIIND DATE TREI PUNCTE SPECIALE

Laurențiu CALMUȚCHI
Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în m. Chișinău)
e-mail: lcalmutchi@gmail.com

Rezumat. În acest articol este propus un sistem de probleme geometrice de construcție în care se cere de restabilit triunghiul, fiind dată o ternă de puncte necoliniare, alcătuită din puncte de aceeași natură.
Cuvinte cheie: triunghi, cerc, cerc înscris, cerc circumscris, problemă de construcție.

Abstract. In this article is proposed a system of geometric construction problems in which it is required to restore the triangle, given a ternary of non collinear points, consisting of points of the same nature.
Keywords: triangle, circle, inscribed circle, circumscribed circle, construction problem.

Este greu de apreciat rolul problemelor de construcție în dezvoltarea matematică a elevilor și studenților. Atât după conținut, cât și după metodele de rezolvare, astfel de probleme nu numai că stimulează acumularea unor performanțe geometrice concrete, dar dezvoltă și capacitatea de a-și imagina o figură sau alta și mai mult de cât atât, de a putea opera în gând cu elementele acestei figuri. Problemele geometrice de construcție ajută elevilor să înțeleagă apariția diferitor figuri geometrice, posibilitatea de a le transforma, iar toate acestea constituie importante premise pentru dezvoltarea gândirii spațiale la elevi și studenți.

Astfel de probleme în mare măsură dezvoltă gândirea logică și intuiția geometrică. Anume din aceste considerente, în toate țările lumii, pentru copii, începând cu cea mai fragedă vârstă se practică pe larg jocurile intelectuale ”Constructor”. A construi înseamnă a crea din careva elemente diferite ceva întreg.

Matematicienii metodiști din Rusia, dar și din alte țări de peste hotare, acordă o deosebită atenție problemelor geometrice de construcție. Cu părere de rău, nu putem afirma acest lucru referitor la manualele școlare din Republica Moldova.

Prin puncte speciale pentru triunghiul arbitrar ABC vom înțelege o ternă de puncte necoliniare $\{E_1, E_2, E_3\}$, care în mod univoc determină triunghiul ABC. Așa de exemplu, sunt mijlocurile laturilor, picioarele înălțimilor, simetricele ortocentrului în raport cu laturile triunghiului, etc. Astfel de puncte se mai numesc puncte de aceeași natură.

Vom demonstra la început două teoreme importante, care vor face să fie mai înțelese problemele rezolvate.

Teorema 1. Simetricele ortocentrului triunghiului față de mijlocurile laturilor aparțin cercului circumscris triunghiului.

Demonstrație. Fie H_1 simetricul ortocentrului H față de mijlocul B_2 a laturii AC. Evident, patrulaterul $AHCH_1$ este paralelogram. Deci, $[H_1A] \parallel [CC_1]$ și $[H_1C] \parallel [AA_1]$. Atunci,

© Calmutchi Laurentiu, 2022

$[H_1A] \perp [AB]$ și $[H_1C] \perp [BC]$. Prin urmare, patrulaterul $ABCH_1$ este inscriptibil. Așa dar, $H_1 \in \omega(A, B, C)$. Analogic se demonstrează, că și simetricele ortocentrului H față de mijlocurile laturilor AB și AC apartin cercului circumscris triunghului ABC. Teorema este demonstrată.

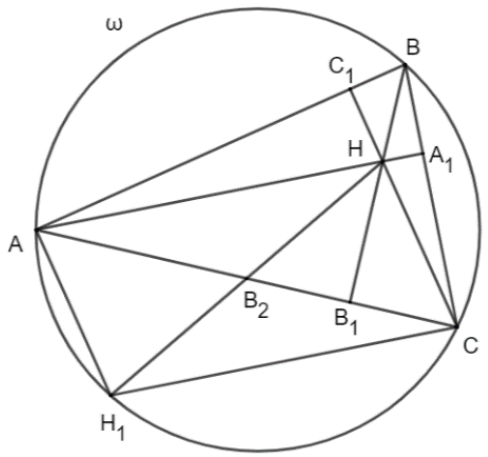


Figura 1.

Teorema 2. Bisectoarele triunghiului, vârfurile căruia sunt picioarele înălțimilor triunghiului ascuțiunghic, aparțin înălțimilor acestui triunghi ascuțitunghic.

Demonstrație. Fie $[AA_1], [BB_1]$ și $[CC_1]$ înălțimile triunghiului ascuțitunghic ABC, iar H ortocentrul acestui triunghi. Deoarece unghiurile AC_1H și AB_1H sunt unghiuri drepte, urmează că punctele A, C_1, H și B_1 aparțin cercului ω_1 cu diametrul $[AH]$. În mod analogic, ne convingem că punctele B_1, H, A_1 și C aparțin cercului ω_2 cu diametrul $[HC]$, iar punctele C_1, H, A_1 și B aparțin cercului ω_3 cu diametrul $[BH]$. Pentru o scriere mai simplă notăm unghiurile, cum este indicat în figura 2.

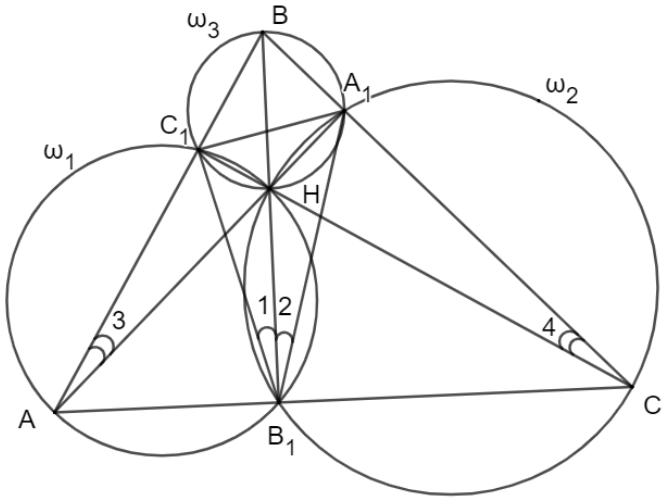


Figura 2.

Observăm, că unghiurile 1 și 3, fiind unghiuri înscrise în cercul ω_1 se sprijină pe același arc. Prin urmare, $\hat{1} = \hat{3}$ (1). Analogic, ne convingem că $\hat{2} = \hat{4}$ (2). Să observăm acum, că triunghiurile dreptunghice ABA_1 și BCC_1 au unghiul ascuțit B comun. Prin urmare, $\hat{3} = \hat{4}$ (3). Din (1), (2) și (3) urmează că $[BB_1]$ conține bisectoarea unghiului B_1 a triunghiului

© Calmutchi Laurentiu, 2022

$A_1B_1C_1$. Analogic, se demonstrează că $[AA_1]$ conține bisectoarea unghiului A_1, iar $[CC_1]$ conține bisectoarea unghiului C_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$. Teorema este demonstrată.

Problema 1. De construit triunghiul, fiind date mijlocurile laturilor.

Soluție. Fie punctele A_1, B_1, C_1 mijlocurile laturilor $[BC], [AC]$ și $[AB]$ corespunzător a triunghiului căutat. Unim aceste puncte prin segmente (Fig. 3). Dreapta n, dusă prin punctul C_1 paralel la segmentul $[B_1A_1]$, intersectează dreapta m dusă prin punctul A_1 paralel la segmentul $[B_1C_1]$ în punctul B. În mod analogic obținem punctele A, C ale triunghiului căutat.

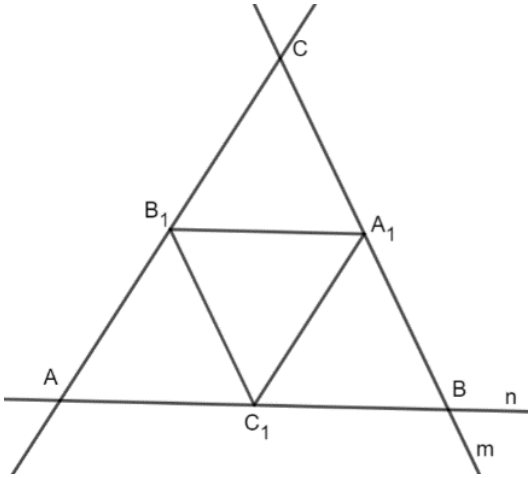


Figura 3.

Problema 2. De construit triunghiul ABC, fiind date picioarele înălțimilor triunghiului.

Soluție. Fie $[AH_1], [BH_2]$ și $[CH_3]$ înălțimile triunghiului ABC, unde H_1, H_2 și H_3 picioarele înălțimilor acestui triunghi. Unim aceste puncte cu ajutorul segmentelor (Fig.4). Conform Teoremei 2 bisectoarele triunghiului $H_1\,H_2H_3$ aparțin înălțimilor triunghiului ABC.

Prin urmare, construcția poate fi efectuată în modul următor: construim bisectoarele triunghiului $H_1H_2H_3$, prin fiecare din punctele H_1, H_2 și H_3 construim câte o dreaptă perpendiculară la bisectoarea corespunzătoare. Aceste drepte se vor intersecta două câte două în vârfurile triunghiului ABC.

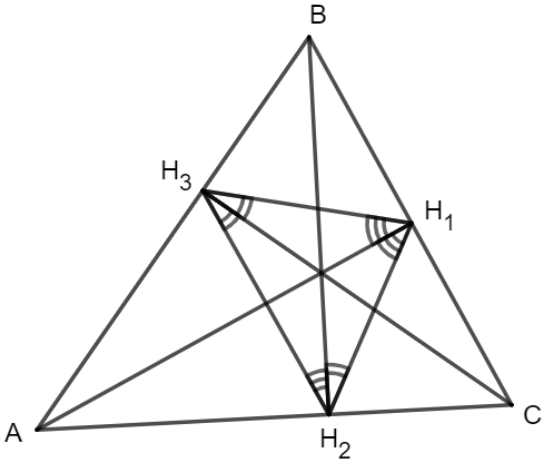


Figura 4.

© Calmutchi Laurentiu, 2022

Problema 3. De construit triunghiul ABC, fiind date trei puncte A', B', C' simetrice centrului cercului circumscris acestui triunghi în raport cu laturile $[BC], [CA], [AB]$ corespunzător.

Soluție. Notăm mijlocurile laturilor $[BC], [CA], [AB]$ prin punctele A_1, B_1, C_1 corespunzător. Deoarece $[B_1C_1] \parallel [BC] \parallel [B'C']$ și $[OA_1] \perp [BC]$, atunci $[OA'] \perp [B'C']$. Analogic $[OB'] \perp [A'C']$. Prin urmare, punctul O este punctul de intersecție a înălțimilor triunghiului $A'B'C'$. Construim la început triunghiul $A'B'C'$. Determinăm punctul O la intersecția înălțimilor acestui triunghi. Construim mijlocurile segmentelor $[OA'], [OB'], [OC']$, adică punctele A_1, B_1, C_1 corespunzător. La intersecția dreptelor perpendiculare la segmentele $[OA'], [OB'], [OC']$ în punctele A_1, B_1, C_1 corespunzător, determinăm vârfurile triunghiului căutat.

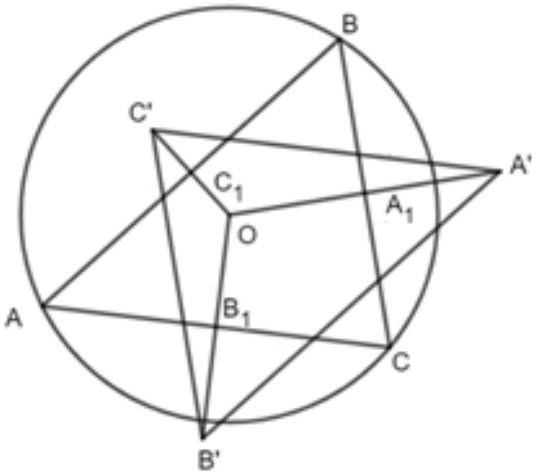


Fig. 5

Problema 4. De construit triunghiul ABC, fiind date punctele simetrice centrului cercului înscris în triunghiul ABC, în raport cu laturile triunghiului.

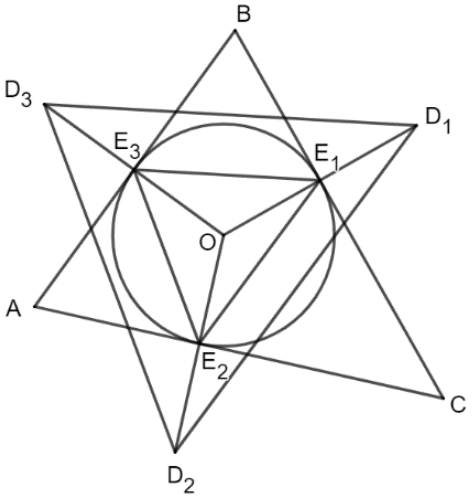


Figura 6.

Soluție. Fie D_1, D_2 și D_3 punctele simetrice centrului O al cercului înscris în triunghiul ABC, în raport cu laturile $[BC], [AC]$ și $[AB]$ corespunzător. Observăm, că punctele

© Calmutchi Laurentiu, 2022

D_1, D_2 și D_3 sunt egal depărtate de centrul O al cercului înscris. Prin urmare, punctele D_1, D_2 și D_3 aparțin cercului circumscris triunghiului $D_1D_2D_3$. Astfel, avem următoarea (construcție) soluție: construim $\Delta D_1D_2D_3$, determinăm centrul O, determinăm mijlocurile E_1, E_2 și E_3 a segmentelor $[OD_1], [OD_2]$ și $[OD_3]$, iar prin punctele E_1, E_2 și E_3 vom construi drepte perpendiculare la segmentele $[OD_1], [OD_2]$ și $[OD_3]$. Aceste drepte intersectându-se două câte două determină vârfurile A, B și C a triunghiului ABC.

Problema 5. De construit triunghiul ABC, fiind date punctele D_1, D_2, D_3, simetricele ortocentrului H în raport cu mijlocurile laturilor triunghiului.

Soluție. Fie H ortocentrul triunghiului căutat ABC, iar D_1, D_2 și D_3 punctele simetrice ortocentrului H, în raport cu mijlocurile laturilor (Fig. 7).

Conform Teoremei 1 punctele D_1, D_2 și D_3 aparțin cercului ω circumscris triunghiului ABC, iar segmentele $[AD_1], [BD_2]$ și $[CD_3]$ sunt diametri ai acestui cerc. Astfel, avem următoarea soluție: construim $\Delta D_1D_2D_3$, determinăm centrul O al cercului circumscris, iar la intersecția semidreptelor $[D_1O), [D_2O)$ și $[D_3O)$ cu cercul ω determinăm vârfurile A, B și C a triunghiului ABC.

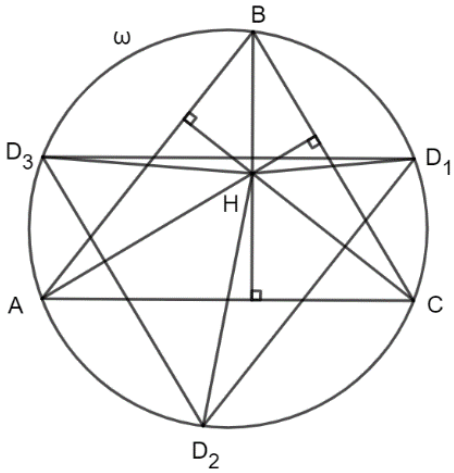


Figura 7.

Problema 6. Restabiliți triunghiul ABC, dacă sunt date 3 puncte de tangență a cercului ω, înscris in acest triunghi, cu laturile $[BC], [AC]$ și $[AB]$ corespunzător (Fig. 8).

Soluție. Fie T_1, T_2 și T_3 punctele de tangență a cercului ω cu laturile $[BC], [AC]$ și $[AB]$ corespunzător (Fig. 8). Construim triunghiul $T_1T_2T_3$ și cercul ω circumscris acestui triunghi. Fie O centrul cercului ω. Atunci, tangentele la cercul ω în punctele T_1, T_2 și T_3 sunt perpendiculare la segmentele $[OT_1], [OT_2]$ și $[OT_3]$ corespunzător. Aceste drepte intersectându-se două câte două determină vârfurile triunghiului căutat ABC.

© Calmutchi Laurentiu, 2022

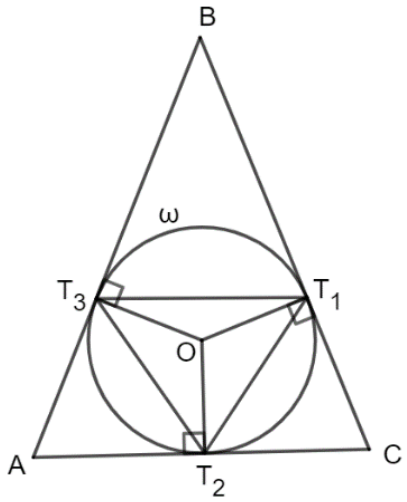


Figura 8.

Problema 7. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar E_1, E_2 și E_3 mijlocurile segmentelor $[AH], [BH]$ și $[CH]$ corespunzător. De construit triunghiul ABC, fiind date punctele E_1, E_2 și E_3.

Soluție. Construim triunghiul $E_1E_2E_3$. Evident, triunghiul $E_1E_2E_3$ este omotetic cu triunghiul ABC, cu centrul de omotetie H și coeficientul de omotetie $k = 2$ (Fig. 9). De aceea, construind înălțimile triunghiului $E_1E_2E_3$, determinăm ortocentrul comun H al triunghiurilor $E_1E_2E_3$ și ABC. Rămâne să dublăm segmentele $[HE_1], [HE_2], [HE_3]$ și să determinăm vârfurile A, B, C corespunzător.

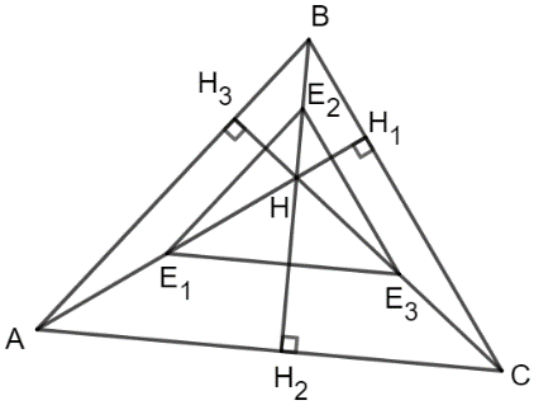


Figura 9.

Problema 8. Prelungirile bisectoarelor triunghiului ABC intersectează cercul ω circumscris acestui triunghi în punctele L_1, L_2, L_3 (Fig. 10). De restabilit triunghiul ABC, fiind date punctele L_1, L_2, L_3 .

Soluție. Construim triunghiul $L_1L_2L_3$. Evident, cercul circumscris triunghiului $L_1L_2\,L_3$ coincide cu cercul ω, circumscris triunghiului ABC. Să demonstrăm la început, că bisectoarele triunghiului ABC conțin înălțimile triunghiului $L_1L_2L_3$.

Fie $[AL_1]$ intersectează $[L_2L_3]$ în punctul H_1. Să demonstrăm că $m(\angle L_1H_1L_2) = 90°$. Într-adevăr, $m(\angle 1) = m(\angle 2) = \frac{m(\angle A)}{2}$ ca unghiuri înscrise ce se sprijină pe același

© Calmutchi Laurentiu, 2022

arc. Analogic, $m(\angle 3) = m(\angle 4) = \frac{m(\angle B)}{2}$ și $m(\angle 5) = m(\angle 6) = \frac{m(\angle C)}{2}$. Atunci, în triunghiul $L_1L_2H_1$ $m(\angle 2) + m(\angle 4) + m(\angle 6) = \frac{m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)}{2} = 90°$. Dar atunci, unghiul $L_1H_1L_2$ are $90°$. Aceasta înseamnă, că $[L_1H_1]$ este înălțimea triunghiului $L_1L_2L_3$. Evident, că H_2 și H_3 de asemenea sunt picioarele înălțimilor triunghiului $L_1L_2L_3$. Acum, devine clară și construcția, anume: construim triunghiul $L_1L_2L_3$, construim cercul ω circumscris acestui triunghi, construim înălțimile acestui triunghi, prelungim fiecare din aceste înălțimi până la intersecție cu cercul ω și obținem vârfurile triunghiului ABC.

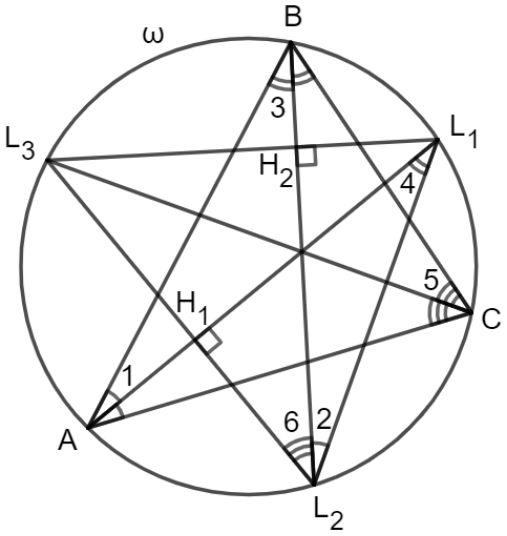


Figura 10.

Problema 9. De construit triunghiul isoscel ABC, dacă sunt date picioarele bisectoarelor acestui triunghi.

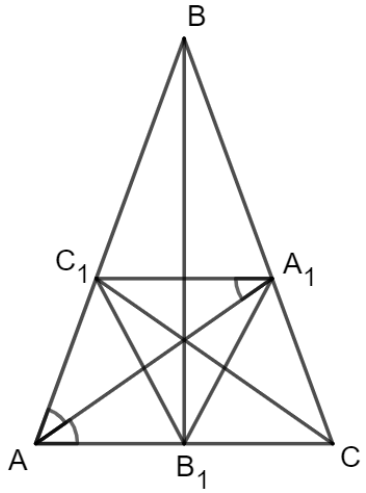


Figura 11.

Soluție. Să presupunem, că triunghiul isoscel ABC este construit. Fie $|AB| = |CB|$. Notăm prin A_1, B_1 și C_1 picioarele bisectoarelor. Construim înălțimea triunghiului $A_1B_1C_1$ dusă din vârful B_1. Prin punctul B_1 construim dreapta l perpendiculară pe această înălțime. Cercul $\omega(C_1, [C_1A_1])$ va intersecta dreapta l în două puncte, unul din care va fi vârful A al triunghiului căutat. Triunghiul C_1A_1C de asemenea este isoscel. În mod

© Calmutchi Laurentiu, 2022

analogic, determinăm vârful C. La intersecția dreptelor (AC_1) și (CA_1) determinăm vârful B.

Observație. În toate problemele rezolvate a fost cercetat doar cazul, când triunghiul căutat ABC era triunghi ascuțitunghic. În problemele 2,8 ortocentrul H va fi situat înafara triunghiului. Propunem, ca în aceste cazuri de efectuat construcția de sine stătător. Menționăm, de asemenea, că nu a fost efectuată cercetarea pentru fiecare problemă rezolvată, pe care o propunem cititorului.

Probleme propuse pentru rezolvare de sine stătător

Problema 10. Punctele E_1, E_2 și E_3 sunt primele puncte de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC cu cercul ω înscris în acest triunghi. De construit triunghiul ABC, fiind date punctele E_1, E_2 și E_3.

Problema 11. Prelungirile înălțimilor triunghiului ABC intersectează cercul ω circumscris acestui triunghi în punctele Q_1, Q_2 și Q_3 corespunzător. De construit triunghiul ABC, fiind date punctele Q_1, Q_2 și Q_3.

Problema 12. De construit triunghiul ABC, fiind date centrele O_1, O_2 și O_3 a cercurilor exînscrise triunghiului ABC.

Indicație. Demonstrați, că picioarele înălțimilor triunghiului $O_1O_2O_3$ coincid cu vârfurile triunghiului ABC (cel căutat).

Problema 13. De construit triunghiul dreptunghic ABC, fiind date picioarele bisectoarelor.

Bibliografie

1. АДАМАР, Ж. *Элементарная Геометрия*. Ч.1, *Планиметрия*. Москва: УЧПЕДГИЗ, 1958.
2. АЛЕКСАНДРОВ, И. И. *Сборник геометрических задач на построение*. Москва: Учпедгиз, 1950. 176 с.
3. ФИЛИПОВСКИЙ, Г. Б. Построение триуголника по трём одноименым точкам. În: *Математика в школе*, 2010. №2, стр. 23 – 27.

© Calmutchi Laurentiu, 2022

CZU: 37.016:519.673

FORMAREA COMPETENȚELOR MATEMATICE LA ELEVI PRIN REZOLVARE DE PROBLEME APLICATIVE

Laurențiu CALMUȚCHI
Ecaterina FILIPOPOLSCHI
Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, UST
e-mail: lcalmutchi@gmail.com

Rezumat. Una din problemele actuale ale instruirii preuniversitare rămâne a fi eficientizarea formării și dezvoltării competențelor matematice prin valorificarea conținuturilor practice aplicative. În articol se prezintă un punct de vedere versus identificarea criteriilor și indicatorilor care caracterizează fiecare componentă și rolul rezolvării problemelor cu caracter aplicativ în formarea competențelor matematice la lecțiile de geometrie în liceu.
Cuvinte-cheie: Competența matematică, probleme aplicative, rezolvarea problemelor, componenta cognitivă a competenței, motivația, reflecția, activitate, niveluri de competență matematică.

Abstract. One of the current problems of pre-university training remains to be the streamlining of the formation and development of mathematical competences by capitalizing on the practical applicative contents. The article presents in terms of identifying criteria and indicators that characterize each component of competence and the role of solving problems with applicative character in the formation of mathematical skills in geometry lessons in high school.
Keywords: mathematical competence, applicative problems, problem solving, cognitive component of competence, motivation, reflection, activity, levels of mathematical skills.

Introducere

Actualmente, ca și în trecut, geometria – gimnastica de necontestat a minții continuă să se bucure de o înaltă apreciere, atât prin caracterul său practic, cât și prin contribuția pe care o aduce la formarea și dezvoltarea personalității elevului. Pornind de la realitatea că geometria este aplicată în viața de zi cu zi, apare necesitatea formării competențelor necesare pentru a facilita conștientizarea ponderii aplicării ei în diverse domenii.

Una din problemele actuale ale instruirii preuniversitare rămâne a fi eficientizarea **orientărilor cu caracter practic aplicativ** a tuturor disciplinelor școlare și în particular a geometriei.

Prezentul Curriculum Național (2019) prevede formarea și dezvoltarea competențelor prin demersuri didactice care să indice explicit apropierea conținuturilor învățării de viața reală.

Curriculumul Național descrie **competența matematică** *ca un sistem integrat de cunoștințe, abilități, atitudini și valori dobândite, formate și dezvoltate prin învățare, a căror mobilizare permite identificarea și rezolvarea problemele apărute în viața cotidiană* [1].

© Calmutchi Laurentiu, Filipopolschi Ecaterina, 2022

Implementarea *Conceptului de a învăța pe toată durata vieții* în formarea și dezvoltarea competenței matematice la lecțiile de geometrie prezintă un proces complex. Formarea competenței matematice durabile este influențată de conexiunea mai multor factori pedagogici: procesul de instruire; procesul de învățământ; educație și dezvoltare a personalității elevului [2].

Formarea competențelor matematice prezintă o *finalitate* a integrării mai multor categorii de factori (aspecte, criterii, componente) implicați în formarea competenței matematice (Figura 1).

Figura 1. Componente integratoare ale competenței matematice

O astfel de diferențiere pe componente conduce la ușurarea procesului de apreciere a competenței matematice formate [6].

Achizițiile finale în termeni de competențe necesită a fi reale, centrate pe aspectul formativ, aplicativ, axate pe rezultate finale - **formarea competenței matematice** și rezolvarea oricăror probleme cu caracter aplicativ în cotidian.

Scopul cercetării *constă în valorificarea posibilității de formare a competenței matematice prin rezolvare de probleme aplicative în procesul studierii geometriei liceale.*

Metode aplicate

Rezolvarea problemelor aplicative (probleme din cotidian) în predarea geometriei prezintă una din cele *mai sigure metode* de formare și dezvoltare a competenței matematice.

După Șapiro, *prin problemă matematică cu conținut practic aplicativ se înțelege problema care dezvăluie aplicațiile matematicii în diferite domenii disciplinare, în procese tehnologice, economie, medicină, în domeniul serviciilor, în viața de zi cu zi.*

© Calmutchi Laurentiu, Filipopolschi Ecaterina, 2022

O problemă de cotidian este o problemă în care se reflectă situații reale din viață și în rezultatul rezolvării, elevul va fi capabil să aplice cunoștințele matematice în viață [10].

Selectarea problemelor cu caracter aplicativ necesită respectarea anumitor condiții:

- Să prezinte valoare euristică și impact educativ asupra personalității elevului;
- Să fie clar expuse noțiunile nematematice din textul problemei;
- Problema cu caracter aplicativ trebuie să oglindească relația dintre problema matematică și nematematică;
- Textul problemei aplicative nu va conține indicații și mijloace de rezolvare;
- În mod obligatoriu situația din problemă să fie una reală, datele din problemă, întrebările, răspunsurile obținute să fie evidente și observate în viața cotidiană;
- Partea practică, aplicativă, să nu pre-evalueze esența matematică a problemei;
- Textul problemelor aplicative să fie și cu caracter interdisciplinar;
- Accesibilitatea informației nematematice pentru elevii care studiază geometria în clasa respectivă [9].

Etapele de rezolvare a problemelor aplicative nu diferă de algoritmul obișnuit de rezolvare, importantă este respectarea următorilor pași:

- Formalizarea (transpunerea textului problemei în modelul matematic);
- Aplicarea – rezolvarea modelului matematic elaborat, efectuarea calculelor;
- Interpretarea – analiza rezultatelor obținute în contextul situației practice formulate;
- Evaluare – verificarea rezultatelor [5].

După P. Mayer, *Formalizarea conținutului problemei* necesită evidențierea unor aspecte importante:

- aspectul lingvistic de însușire a conținutului problemei (explicarea sensului unor cuvinte, transferul conținutului în termeni matematici);
- aspectul semantic (recapitularea unor termeni, unități de măsură, a unor date din alte domenii disciplinare);
- aspectul asemănării problemei date cu unele tipuri deja rezolvate.

Rezolvarea problemei necesită *aspectul procedural și strategic* cu un plan amănunțit separat pe etape [4]. Scenariile modului de cercetare și rezolvare a problemelor din cotidian se prezintă în Figura 2.

Scenariul 1	**Scenariul 2**	**Scenariul 3**
• Problema este formulată de profesor,	• Profesorul formulează problema,	• *Situația-problemă se identifică de elevi,

• Profesorul rezolvă problema împreună cu elevii, ⬇ • *Situația-problemă se identifică împreună cu elevii.	• Elevii sinestătător rezolvă problema, ⬇ • *Situația-problemă se identifică	• Problema este formulată de către elevi, ⬇ • Problema se rezolvă sinestătător de către elevi.

Figura 2. Modul de cercetare și rezolvare a problemelor cu caracter aplicativ

La aprecierea și repartizarea elevilor pe niveluri de competențe matematice, formate conform ponderii criteriilor, indicatorilor care corespund întocmai cu componentele competenței, au fost utilizate mai multe tehnologii: evaluarea și aprecierea gradului de motivație și reflecție s-a efectuat conform indicatorilor referiți în metodicile propuse și adoptate de A. Usova și L. Romanov. Aprecierea nivelului general de stăpânire a unor concepte, completitudinea, nivelului de durabilitate și de stăpânire de către elevi a unor tehnici de gândire matematică s-a realizat prin testare și calcul al coeficienților corespunzător cu evidențierea coeficientului mediu $K_{MED.}$

- *Coeficientului de completitudine* al stăpânirii conceptelor matematice (noțiunilor) se calculează după formula: $K = \frac{n}{N}$, unde n – numărul de noțiuni asimilate corect; N – numărul de noțiuni expuse pentru control.
- *Coeficientul durabilității* (de posedare) conceptelor matematice se calculează conform formulei: $K = \frac{K_1}{K_2}$, unde K_1 – coeficientul de completivitate al stăpânirii conceptelor matematice la etapa inițială și K_2 – la etapa finală a experimentului pedagogic efectuat.
- *Aprecierea nivelului* de stăpânire de către elevi a *tehnicilor de gândire matematică* se apreciază după formula: $K = \frac{n}{N}$, unde: n - numărul de tehnici învățate corect; N- numărul total de tehnici propuse, luând în considerație coeficientul de completivitate, durabilitate a nivelurilor de stăpânire a tehnicilor de gândire matematică la etapa inițială și finală a experimentului pedagogic. Transferul indicatorilor de completivitate, durabilitate a conceptelor matematice, completivitatea, durabilitatea și conștientizarea însușirii tehnicilor de gândire matematică se exprimă sub formă de unități, puncte acumulate sau în procente după cum urmează:

$0{,}9 \leq K \leq 1{,}0$ – nivelul superior (9-10 puncte, 90-100 %);

$0{,}7 \leq K \leq 0{,}8$ – nivelul mediu (7-8 puncte, 70-80 %);

$0{,}5 \leq K \leq 0{,}6$ – nivelul inferior (5-6 puncte, 50-60 %) [7, 8].

În continuare propunem exemple de probleme propuse pentru evaluare:

1. Dintr-o foaie metalică de formă pătrată cu latura *a* trebuie de tăiat desfășurata unei piramide patrulatere regulate astfel încât vârfurile pătratului să se unească cu vârful piramidei. Cum de tăiat foaia pentru a obține o piramidă de volum maximal?
2. O cutie de conservă de un volum dat are forma unui cilindru. Ce relație (raport) trebuie să fie între dimensiunile cutiei (diametru și înălțime) pentru ca ea să fie confecționată din o cantitate minimă de metal?
3. Determinați, care poate fi cel mai mic volum al conului, circumscris unei sfere, volumul căreia este egal cu *V*.
4. Care ar putea fi aria totală maximală a unui con înscris într-o sferă, aria suprafeței căreia este egală cu Q?

Rezultate și discuții

Analizând curriculumul liceal la *Matematică, cl.XII* și în special ceea ce ține de geometrie, observăm că rolul problemelor în procesul de predare este unul decisiv și că mai mult de jumătate din timpul acordat este alocat rezolvării problemelor. Problemele se rezolvă practic la fiecare etapă a lecției, iar ponderea problemelor din geometrie cu conținut aplicativ este egală cu 44,70%.

Analiza testelor de bacalaureat la matematică din Republica Moldova denotă o pondere de probleme geometrice cu caracter aplicativ egală cu 16,66%.

În urma cercetării modului de alcătuire a itemilor la testele pentru examenul de bacalaureat, se observă o reticență a ponderii problemelor aplicative.

Experimentul pedagogic realizat în clasele a XII–a A (GE – grupa experimentală) și a XII–a B (GC – grupa de control), la etapa finală, demonstrează o creștere a calității cunoștințelor elevilor din ambele grupe. În GE calitatea cunoștințelor crește de la 45 până la 70 % (etapa finală), iar nota medie a grupei evoluează de la 7,5 până la 8,05. În GC calitatea cunoștințelor evoluează de la 7,05 până la 7,25%, iar calitatea cunoștințelor: de la 40 până la 45% la etapa finală a experimentului pedagogic. Reprezentarea grafică și evidențierea progresului școlar se prezintă în Tabelul 1 și Figura 3.

Tabelul 1. Evoluarea notelor în GE

Evaluarea inițială	Evaluarea finală	Notele
3	2	10
4	5	9
2	7	8
6	4	7
2	2	6
2	0	5
1	0	4

© Calmutchi Laurentiu, Filipopolschi Ecaterina, 2022

Competențele matematice se *manifestă* prin ***acțiune*** și se *materializează în* ***produse.*** Produsul obținut în cazul nostru se prezintă prin capacitatea rezolvării problemelor care au fost propuse. În urma cercetărilor efectuate, în formarea competențelor matematice criteriului motivațional-valoric i se alocă 0,1; criteriului cognitiv 0,25; activității elevilor 0,55 (0,3+0,25) și celui reflexiv-evaluativ 0,1unități [9]. Considerând cunoștințele acumulate, activitatea de rezolvare a problemelor aplicative, nivelul de dezvoltare a gândirii critice ($K_{MED.}$), ca componentă de bază a competenței matematice (cognitivă), putem repartiza colectivele de elevi pe niveluri. Repartizarea pe niveluri a elevilor din GE se prezintă în Tabelul 2.

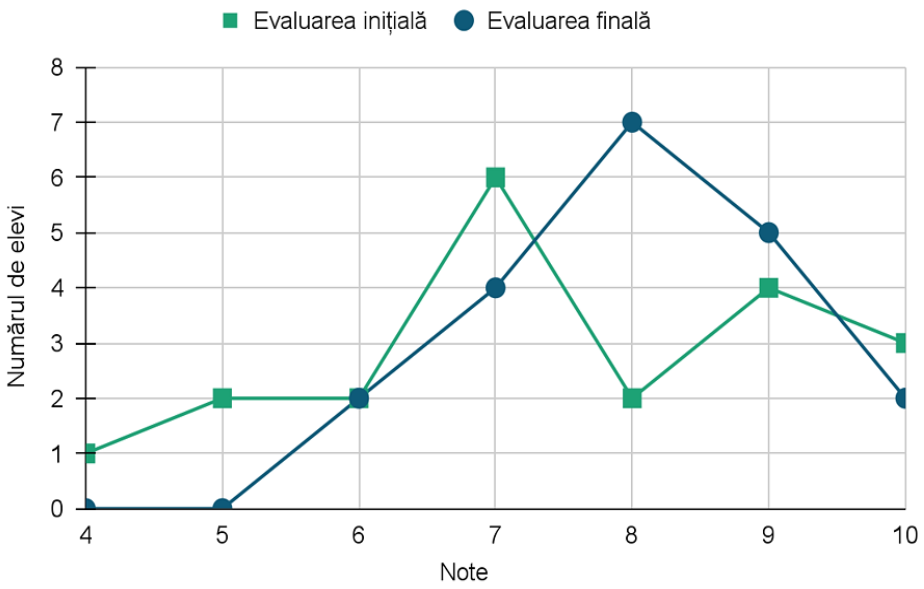


Figura 3. Evoluarea progresului școlar la geometrie în GE

Tabelul 2. Repartizarea elevilor din GE pe niveluri de competențe matematice formate

Etapele experimentului	Etapa inițială (GE)			Etapa finală (GE)		
Evaluarea competenței matematice (criteriile)	Nivel superior	Nivel mediu	Nivel inferior	Nivel superior	Nivel mediu	Nivel inferior
Evaluarea I și II	35 %	40 %	20 %	35 %	45 %	20 %
Activitatea elevilor	30 %	45 %	25 %	35 %	45 %	20 %
$K_{MED.}$	30 %	45 %	25 %	35 %	50 %	15 %
Calitatea cunoștințelor	45 %			70 %		
Nota medie	7,5			8,05		
Dispersia (б), unități	1,25			0,9		

Repartizarea grafică a elevilor pe nivele de competențe matematice formate se prezintă în Figura 4.

La repartizarea elevilor pe niveluri de competență s-au luat în considerație indicatorii prezentați în Tabelul 2, caracterizând detailat aspectul cognitiv al competenței matematice formate (cu mici abateri în privința motivației și reflecției, care nu au fost luate în calcul).

Abaterea medie calculată, adică dispersia, prezintă modul în care valorile caracteristice gravitează în jurul mediei și în cazul experimentului pedagogic efectuat pentru GE dispersia cuprinde valorile 1,25 la etapa inițială și 0,9 la finele experimentului, exprimând omogenitate mare a cunoștințelor elevilor.

Indicatori de apreciere a activităților de rezolvare a problemelor aplicative corespunde nivelurilor de formare a competențelor matematice. Nivelul inferior - este stăpânit primul scenariu, nivelul mediu - stăpânirea primului și al doilea scenariu, nivelul superior - sunt însușite toate scenariile activității de cercetare și rezolvare a problemelor aplicative. Scenariile sunt propuse (Figura 3) în ordinea creșterii ponderii activității centrate pe elev.

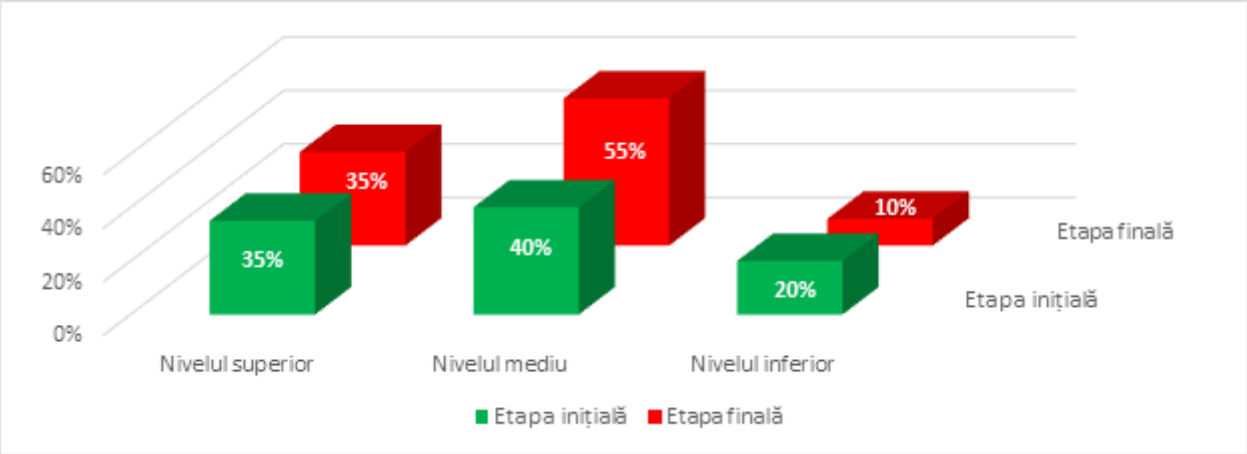


Figura 4. Evoluarea nivelurilor de competențe matematice la elevii din GE

Concluzii

În contextul noilor orientări și tendințe privind modernizarea învățământului impuse de cerințele societății actuale, geometriei îi revine un rol esențial în formarea și dezvoltarea personalității elevului, iar rezolvarea problemelor aplicative contribuie la menținerea atitudinii pozitive față de matematică și studierea ei cu scopul aplicării în viața cotidiană. Astfel, rezolvarea problemelor cu caracter aplicativ contribuie esențial la formarea și dezvoltarea competențelor matematice la elevii din instituțiile preuniversitare.

Bibliografie

1. Curriculum Național. Matematica. Clasele X-XII. *Ghid de implementare*. Chișinău, 2020. 180 p.
2. BOCOȘ, M. *Instruirea interactivă*. Iași: Polirom, 2013. 472 p.
3. PURCARU, M. Didactica matematicii. *Ghid de bune practici*. București, 2013. 377 p.

© Calmutchi Laurentiu, Filipopolschi Ecaterina, 2022

4. MAYER, R. E. *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Frecman and Company, 1992. 580 p.
5. POLYA, G. How to Solve. It: *A New Aspect et Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press, 2004. 280 p.
6. ЗИМНЯЯ, И. К. *Ключевые компетенции – новая парадигма современного образования*. Москва, 2006.
7. КОЛБИНА, Е. В. *Компетентностно-контекстная организационно-методическая система. Особенности технологии реализации*. Барнаул: АлтГПАБ, 2012. 270 с.
8. ЛУКЬЯНОВА, М. И.; КАЛИНИНА, Н. В. *Психолого-педагогические показатели деятельности школьников критерии и диагностика*. Москва: Творческий центр Сфера, 2004. 208 с.
9. СМИРНОВА, И. М.; СМИРНОВ, В. А. *Геометрические задачи с практическим содержанием*. Москва: МЦНМО, 2010. 136 с.
10. ШАПИРО, И. М. *Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики*. Москва: Просвещение, 1990. 96 с.

© Calmutchi Laurentiu, Filipopolschi Ecaterina, 2022

CZU: 519.673:511.12

PROBLEME DE NUMĂRARE

Vladimir CERBU
Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare” Câmpulung Moldovenesc, România
e-mail: cerbuvlad@gmail.com

Rezumat. Articolul prezintă succint principiile și metodele de numărare întâlnite în probleme de concurs, precum și câteva aplicații imediate cu scopul fixării cunoștințelor. A fost gândit ca o lecție introductivă pentru juniori și se încheie cu o listă de probleme propuse de tip JBMO, BMO sau chiar IMO.
Cuvinte cheie: problemă de concurs, problemă de numărare, mulțime, principiul multiplicităţii, principiul bijecţiei, principiul partiţiei, principiul includerii şi al excluderii, numărarea recurentă.

Abstract. The article briefly presents the counting principles and methods encountered in competition problems, as well as some immediate applications for the purpose of knowledge fixation. It was intended as an introductory lesson for juniors and ends with a list of proposed JBMO, BMO or even IMO type problems.
Keywords: contest problem, counting problem, set, principle of multiplicity, principle of bijection, principle of partition, principle of inclusion and exclusion, recurring counting.

1. Principiul multiplicităţii (regula produsului)

Teoremă. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulţimi nevide şi finite. Are loc relaţia:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

unde $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)/a_i \in A_i, \forall i = \overline{1,n}\}$ este produsul cartezian al celor n mulţimi, iar $|X|$ este numărul de elemente al mulţimii finite X (cardinalul mulţimii finite X).

Observaţie. Acest principiu se demonstrează uşor prin inducţie matematică şi poate fi reformulat astfel:

Fie $A_1, A_2, \dots, A_k$ operaţiuni succesive, prima putând fi efectuată în n_1 moduri, a doua în n_2 moduri, …, ultima în n_k moduri. În aceste condiţii, succesiunea celor k operaţiuni poate fi efectuată în $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ moduri.

Aplicaţia 1.1. Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă el coincide cu răsturnatul său. Câte numere palindrom de cinci cifre există? Dar de şase cifre?

Soluţie. Un număr palindrom de cinci (sau şase) cifre este bine determinat de primele trei cifre ale sale: $\overline{abcba}$ (sau $\overline{abccba}$). Putem alege prima cifră în 9 moduri (nu poate fi 0), iar a doua şi a treia în câte 10 moduri. Astfel există $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ palindromuri de cinci cifre. Există tot 900 numere palindrom de şase cifre.

Aplicaţia 1.2. Determinaţi numărul tripletelor ordonate (A_1, A_2, A_3) de mulţimi cu proprietăţile: (i) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3, \dots ,10\}$;

$$\text{(ii)}\ \ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Soluţie. Considerăm tabelul:

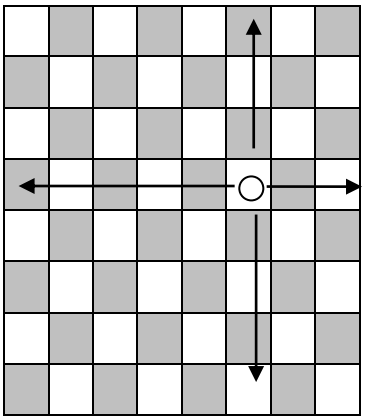
© Cerbu Vladimir, 2022

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1										
A_2										
A_3										

Căsuţa de la intersecţia liniei $A_i (i = 1,2,3)$ cu coloana $j (j = 1,2,3, \dots ,10)$ o completăm cu 1 dacă $j \in A_i$ şi cu 0 dacă $j \notin A_i$. Atunci numărul tripletelor dorite coincide cu numărul modalităţilor de completare a tabloului, astfel încât să nu existe coloane $(0,0,0)$ (condiţia (i)) sau coloane $(1,1,1)$ (condiţia (ii)). Fiecare coloană poate fi completată în $2^3 - 2 = 6$ moduri, prin urmare tabloul poate fi completat în 6^{10} moduri.

Aplicaţia 1.3. În câte moduri putem aşeza 8 turnuri diferite pe tabla de şah, aşa încât oricare două să nu se atace reciproc? Dar 8 turnuri identice?

Soluţie. Primul turn poate fi aşezat pe oricare din cele 64 de pătrăţele ale tablei. El atacă o linie şi o coloană, unde nu mai putem plasa alt turn. Al doilea turn poate deci ocupa unul din cele $64 - (8 + 8 - 1) = 49$ de pătrăţele rămase şi ocupă şi el o linie şi o coloană.

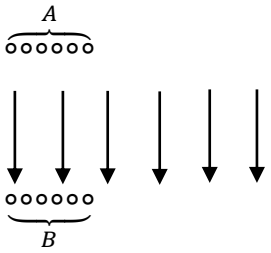


Rămân $49 - (7 + 7 - 1) = 36$ de câmpuri pentru al treilea turn, 25 pentru al patrulea etc. Folosind regula produsului, obținem $(8!)^2$ modalităţi de aşezare a celor 8 turnuri.

Dacă turnurile sunt identice, fiecare din aranjările anterioare defineşte 8! aşezări identice. În acest caz vor fi $\frac{(8!)^2}{8!} = 8!$ modalităţi de aşezare.

2. Principiul bijecţiei

Teoremă. Două mulţimi finite *A* şi *B* între care se poate descrie o funcţie bijectivă $f: A \to B$ au acelaşi număr de elemente.



$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f: A \to B, f \text{ bijectivă}$$

Aplicaţia 2.1. Să determinăm numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu *n* elemente.

Fie $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şi *P (A)*= $\{X / X \subseteq A\}$mulţimea părţilor lui *A*. Să considerăm mulţimea *C* a cuvintelor binare de lungime *n*, adică

$$C = \{c_1 c_2 \dots c_n / c_i \in \{0,1\}, \forall i = \overline{1,n}\}.$$

© Cerbu Vladimir, 2022

Definim o funcţie $f: P(A) \to C$, $f(X) = c_1 c_2 \dots c_n$ unde $c_i = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_i \in X \\ 0 \text{ dacă } x_i \notin X \end{cases}$.

Se arată uşor că f este bijecţie, deci $|P(A)| = |C| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{factori}} = 2^n$.

Pentru numărarea cuvintelor binare din C am ţinut cont de faptul că fiecare c_i poate lua două valori (0 sau 1) şi am aplicat principiul multiplicităţii.

Propoziţie. O mulţime cu n elemente are 2^n submulţimi.

O altă demonstraţie a propoziţiei de mai sus foloseşte binomul lui Newton:

Cum C_n^k =numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente, avem $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

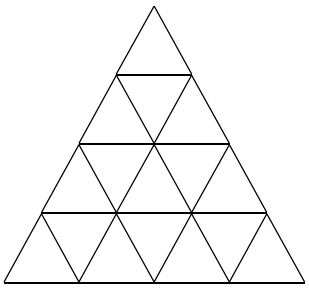
3. Principiul partiţiei

Partiţionarea convenabilă a unei mulţimi $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ în părţi disjuncte două câte două şi numărarea elementelor fiecărei părţi este un procedeu eficient şi de aceea adesea întâlnit în probleme elementare de numărare.

Teoremă. Pentru orice n mulţimi finite şi disjuncte două câte două $X_1, X_2, \dots, X_n$ avem

$$|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| .$$

Aplicaţia 3.1. Triunghiul echilateral de latură 4 cm este împărţit în triunghiuri echilaterale cu latura de 1 cm , prin paralele la laturile sale. Câte triunghiuri se pot vedea pe figură?



Numărăm triunghiurile cu latura 1 cm, 2cm, 3 cm, respectiv 4 cm, apoi adunăm numerele obţinute. Triunghiurile cu latura 1 cm se numără rând cu rând:

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Triunghiuri cu latura 2 cm sunt şapte: şase cu vârful în sus şi unul cu vârful în jos. Triunghiuri cu latura 3 cm găsim trei şi mai avem un triunghi cu latura de 4 cm. În total, pe desen se pot vedea $16 + 7 + 3 + 1 = 27$ triunghiuri.

4. Principiul includerii şi al excluderii

Principiul includerii şi al excluderii constituie o generalizare a identităţii

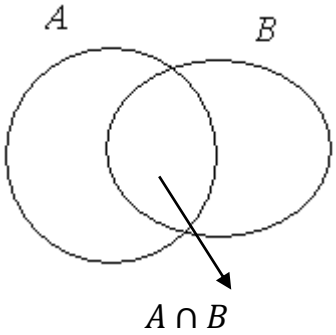
$$(1) \qquad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| , \text{ unde } A, B \subseteq X.$$

Teoremă. Dacă $X_i (1 \le i \le n)$ sunt submulţimi ale unei mulţimi X, are loc relaţia:

$$(2) \quad \left|\bigcup_{i=1}^n X_i\right| = \sum_{i=1}^n |X_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |X_i \cap X_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \left|\bigcap_{i=1}^n X_i\right|$$

Demonstraţie. Vom face demonstraţia prin inducţie după n. Pentru $n = 2$ se obţine relaţia (1), uşor de justificat cu ajutorul figurii următoare: Numărăm elementele mulţimii $A \cup B$. Făcând suma

© Cerbu Vladimir, 2022



$|A| + |B|$, se observă că elementele din $A \cap B$ au fost numărate de două ori, prin urmare trebuiesc excluse. Deci

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Fie acum $n \geq 3$. Să presupunem formula (2) adevărată pentru $n-1$ mulţimi şi să o demonstrăm pentru n mulţimi. Avem:

$$|X_1 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}) \cap X_n|$$

Aplicând distributivitatea se obţine

$$(X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}) \cap X_n = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (X_i \cap X_n),$$

iar din ipoteza de inducție rezultă:

$|\bigcup_{i=1}^{n} X_i| = |\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i| + |X_n| - |\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (X_i \cap X_n)| = \sum_{i=1}^{n-1} |X_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |X_i \cap X_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \cdots + (-1)^{n-2} \cdot |\bigcap_{i=1}^{n-1} X_i| + |X_n| - \sum_{i=1}^{n-1} |X_i \cap X_n| + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |X_i \cap X_j \cap X_n| - \ldots$

de unde, regrupând termenii, se obţine relaţia (2).

Aplicaţia 4.1. Determinarea funcţiei lui Euler $\varphi(n)$.

Fiind dat un număr natural n , $\varphi(n)$ reprezintă numărul numerelor naturale mai mici ca n şi relativ prime cu n. Dacă descompunerea lui n în factori primi distincţi este $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_q^{i_q}$ şi se notează cu X_i mulţimea numerelor naturale mai mici sau egale cu n care sunt multipli de p_i, se obţine $|X_i| = \frac{n}{p_i}$, $|X_i \cap X_j| = \frac{n}{p_i p_j}$ etc.

Deci $\varphi(n) = n - |X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_q| = n - \sum_{i=1}^{q} |X_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq q} |X_i \cap X_j| - \cdots =$
$= n - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq q} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^q \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_q}$, adică $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$.

Aplicaţia 4.2. Determinarea numărului $D(n)$ al permutărilor a n elemente fără puncte fixe.

Fie p o permutare a mulţimii $A = \{1,2,\ldots,n\}$ adică o bijecţie $p: A \to A$. Permutarea p are un punct fix în i dacă $p(i) = i$. Dacă notăm cu X_i mulţimea permutărilor care au un punct fix în i , rezultă că $D(n) = n! - |X_1 \cup \ldots \cup X_n| = n! - \sum_{i=1}^{n} |X_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i \cap X_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |X_i \cap X_j \cap X_k| + \cdots + (-1)^n \cdot |\bigcap_{i=1}^{n} X_i|$

Se obţine $|X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_k}| = (n-k)!$, deoarece o permutare din mulţimea $X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_k}$ are puncte fixe în poziţiile $i_1, i_2, \ldots, i_k$, celelalte imagini putând fi alese din cele $n-k$ elemente rămase în $(n-k)!$ moduri. Deoarece k poziţii $i_1, i_2, \ldots, i_k$ pot fi alese din mulţimea celor n poziţii în C_n^k moduri, rezultă $D(n) = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \cdots + (-1)^n C_n^n$ sau

© Cerbu Vladimir, 2022

$$D(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

5. Numărul funcțiilor $f: A \to B$ bijective, injective, surjective, strict crescătoare, crescătoare

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $|A| = a, |B| = b$ atunci:

5.1. Numărul tuturor funcțiilor $f: A \to B$ este b^a.

5.2. Există funcții injective $f: A \to B$ dacă și numai dacă $a \leq b$. În acest caz numărul funcțiilor injective $f: A \to B$ este A_b^a.

5.3. Există funcții surjective $f: A \to B$ dacă și numai dacă $a \geq b$. În acest caz numărul funcțiilor surjective $f: A \to B$ este $b^a - C_b^1(b-1)^a + C_b^2(b-2)^a - \ldots + (-1)^{b-1}C_b^{b-1}$.

5.4. Există funcții bijective $f: A \to B$ dacă și numai dacă $a = b$. În acest caz numărul funcțiilor bijective $f: A \to B$ este $P_a = a!$.

5.5. Pentru $A, B \subset \mathbb{R}$, există funcții strict crescătoare $f: A \to B$ dacă și numai dacă $a \leq b$. În acest caz numărul funcțiilor strict crescătoare $f: A \to B$ este C_b^a.

5.5. Pentru $A, B \subset \mathbb{R}$, numărul funcțiilor crescătoare $f: A \to B$ este C_{a+b-1}^a.

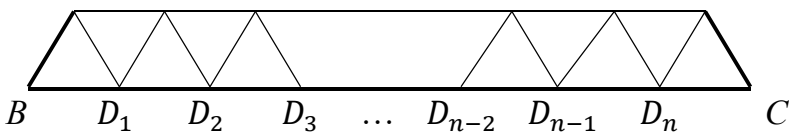
6. Numărarea recurentă

Dacă numărul obiectelor dintr-o mulţime într-un stadiu *n* depinde de numărul obiectelor în stadii anterioare, încercăm să stabilim o relaţie de recurenţă pentru numerele căutate.

Aplicaţia 6.1. Un triunghi echilateral de latură 10 se împarte în 100 de triunghiuri echilaterale de latură 1 prin paralele duse la laturi. Determinaţi numărul triunghiurilor echilaterale care se pot vedea pe desen.

Soluţie. În cazul triunghiului echilateral de latură 4, am făcut numărarea cu ajutorul regulii sumei (vezi aplicaţia 3.1). Deşi putem proceda la fel şi acum, situaţia este mult mai greu de controlat.

Pentru triunghiul echilateral de latură *n*, notăm x_n numărul de triunghiuri echilaterale care se formează. Fie $\triangle ABC$ echilateral, de latură $n+1$, împărţit în $(n+1)^2$ triunghiuri echilaterale de latură 1. Vom număra triunghiurile cu cel puţin un vârf pe $[BC]$, celelalte fiind numărate în x_n (vezi figura).



© Cerbu Vladimir, 2022

Date două puncte pe $[BC]$, există exact un triunghi echilateral care să le aibă drept vârfuri. Cum o pereche de puncte pe $[BC]$ poate fi aleasă în C_{n+2}^2 moduri, există $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ triunghiuri cu două vîrfuri pe $[BC]$.

Cu un singur vîrf pe $[BC]$ există n triunghiuri de latură 1 (triunghiurile cu vârfurile $D_1, D_2, \ldots, D_n$ din figura de mai sus), $n-2$ triunghiuri de latură 2 (cu vârfurile $D_2, D_3, \ldots, D_{n-1}$), $n-4$ triunghiuri de latură 3 (cu vârfurile $D_3, D_4, \ldots, D_{n-2}$) etc. În total avem $n+(n-2)+(n-4)+\ldots$ astfel de triunghiuri. Pentru a evita discuţia par-impar, procedăm astfel:

Am arătat că $x_{n+1} = x_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + n + (n-2) + (n-4) + \ldots$, de unde obţinem

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + (n+1) + (n-1) + (n-3) + \ldots$$

Prin adunarea celor două relaţii rezultă:

$$x_{n+2} = x_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+2} = x_n + \frac{(n+2)(3n+5)}{2} \qquad (*)$$

Cum $x_1 = 1, x_2 = 5$ (**), din aproape în aproape găsim că $x_{10} = 315$.

Observaţie. Recurenţa (*) cu condiţiile iniţiale (**) poate fi rezolvată şi se obţine

$$x_n = \frac{4n^3+10n^2+4n-1+(-1)^n}{16}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n = 4$ se obţine $x_4 = 27$, ca în aplicaţia 3.1.

8. Probleme propuse

8.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați numărul perechilor de numere întregi (x, y) pentru care $|x^2 - y^2| = n$.

8.2. Pentru un număr natural nenul m considerăm mulțimea $M = \{1,2,3,\ldots,m\}$. Să se determine numărul funcțiilor crescătoare $f: M \to M$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in M$.

8.3. Fie $n \geq 2$ un număr natural liber de pătrate (adică nu există p prim așa încât p^2 divide n). Să se determine numărul funcțiilor $f: \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ cu proprietatea că $f(1)f(2)\ldots f(n)$ divide n.

8.4. Fie $n \geq 2$ un număr natural liber de pătrate. Pentru o funcție $f: \{1,2,3,\ldots,n\} \to \{1,2,3,\ldots,n\}$ notăm $P_f = f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$.

a) Câte astfel de funcții au proprietatea că n și P_f sunt numere prime între ele?

b) Câte funcții au proprietatea că cel mai mare divizor comun al numerelor n și P_f este număr prim?

8.5. În câte moduri putem pune 8 ture pe tabla de șah, simetric față de o diagonală a tablei, astfel încât ele să nu se atace unele pe celelalte?

© Cerbu Vladimir, 2022

8.6. Găsiți numărul de numere naturale cu n cifre, toate cifrele fiind din mulțimea $\{1,2,3\}$ și astfel încât diferența dintre oricare două cifre vecine este de cel mult 1.

8.7. Se dă un alfabet cu trei litere a, b, c. Să se găsească numărul de cuvinte cu n litere care conțin un număr par de a-uri.

8.8. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$. Determinați în câte moduri îl putem scrie pe n ca produs de k factori naturali, oricare doi factori fiind relativ primi, dacă:

a) ținem cont de ordinea scrierii factorilor;

b) nu ținem cont de ordinea scrierii factorilor.

Bibliografie

1. TOMESCU, I. *O introducere în combinatorică*. București: Editura Tehnică, 1972.
2. PANAITOPOL, L.; ȘERBĂNESCU, D. *Probleme de teoria numerelor și combinatorică pentru juniori*. Zalău: Editura GIL, 2003.
3. SCHWARZ, D.; POPA, G. *Probleme de numărare*. Zalău: Editura GIL, 2007.
4. Colecția revistei *Gazeta Matematică*.

© Cerbu Vladimir, 2022

CZU: 58:582.677

ȚESUTURILE MECANICE DIN TULPINA UNOR MAGNOLIOFITE – MODEL DE CONSTRUCTIE INGINEREASCĂ ȘI SURSĂ DE FIBRE TEXTILE

Eugenia CHIRIAC
Sofia GRIGORCEA
Boris NEDBALIUC
Facultatea Biologie și chimie, Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: eugeniachiriac@gmail.com, sofinel@mail.ru, boris.nedbaliuc@gmail.com

Rezumat. Trăim într-o lume care se schimbă zi de zi, iar în vocabularul nostru au devenit deja, obișnuite cuvintele: internet, încălzire globală, telefon mobil, cameră digitală etc. A ține pasul cu tehnologia în schimbare este o adevărată provocare, fapt care motivează o altă abordare în procesul de cunoaștere. Botanica este o știință dinamică, cu informații noi despre plante, oferite în mod constant de către cercetătorii din alte domenii, având ca suport principiile de bază ale științei plantelor. Or, aceasta permite extinderea cunoștințelor despre plante, motivând studierea și protecția lor până la o revelație.
Cuvinte-cheie: plante, sclerenchim, țesut mecanic, schelet, rezistență, elasticitate, interdisciplinaritate.

Abstracts. We live in a world that changes day by day, and in our vocabulary they have become already, the usual words: internet, global warming, mobile phone, digital camera, etc. Keeping up with changing technology is a real challenge, which motivates a different approach in the knowledge process. Botany is a dynamic science, with new information about plants, constantly offered by researchers in other fields, based on the basic principles of plant science. Or, it allows the extension of knowledge about plants, motivating their study and protection until a revelation.
Keywords: plants, sclerenchyma, mecanichal tissue, skeleton, resistance, elasticity, interdisciplinarity.

1. Necesitatea abordărilor interdisciplinare în studierea biologiei

Pentru noi, cei, care activează în domeniu, studiul plantelor a fost și este o pasiune pentru o explorare interdisciplinară a relațiilor dintre plantă și om, meritând întotdeauna efortul de a încerca să înțelegi enigmele și nenumăratele minunății ale organismului vegetal.

Plantele ne marchează existența noastră, inclusiv, cea emoțională și socială. Necăutând la omniprezența lor, multe aspecte despre plante nu sunt suficient cunoscute, poate și din motivul că până mai ieri, fiecare dintre disciplinele biologice erau mai mult individuale, preocupate, fiind, de studierea și rezolvarea unor anumitor sarcini și obiective.

Cunoaștem cu toții, că plantele ne furnizează oxigenul, fără de care nu există viață, ne oferă hrană și adăpost. Pe lângă toate acestea, omul mai este și consumator de produse, respectiv, articole vestimentare naturale, materia primă a cărora se extrage din plante, or aceasta din urmă are legătură strânsă cu structura anatomică a plantelor.

© Chiriac Eugenia, Grigorcea Sofia, Nedbaliuc Boris, 2022

Spre deosebire de animale, plantele nu au un schelet adevărat, iar funcția de susținere la ele este îndeplinită de unele celule (țesuturi) cu o organizare specifică din organismul vegetal, care la rândul lor au tangențe atât cu rezistența plantelor, cât și cu industria ușoară (producerea țesăturile naturale).

La plantele superioare, rezistența necesară pentru greutatea propriilor organe (ramuri, frunze, flori, fructe) și a acțiunii unor factori de mediu (vânt, ploaie, zăpadă), care exercită forța de presiune, întindere, răsucire, este doar parțial asigurată de turgescența celulelor și de țesutul conducător lemnos. Aceste însușiri sunt completate în mare parte de țesuturi specializate, numite țesuturi mecanice sau de susținere.

2. Țesuturile mecanice - scheletul sau armătura organelor vegetale

Plantele posedă o capacitate uimitoare de a se opune diferitor sarcini mecanice datorită solidității, elasticității și flexibilității tulpinii, însușiri care depind de arhitectura țesutului mecanic în organismul vegetal. În corpul plantei, țesuturile mecanice joacă rolul de armătură, înconjurată de celule vii în stare de turgescență, care împreună, asigură plantei o duritate deosebită. Astfel, plantele, respectiv, organele lor, fiind supuse diferitelor sarcini dinamice, acționează asemănător arcurilor, care revin în poziția inițială după încetarea acțiunii sarcinii. Iată de ce trunchiul unui arbore, care se clatină sub greutatea coroanei, nu are structura unui tub gol și rigid, dar a unui arc compact și elastic.

În conformitate cu teoria principiilor mecanice de construcție, corpul plantei poate fi comparat cu o construcție complexă din beton armat, în care ambele materiale ferul și betonul, se completează unul cu altul. Armatura de fer (carcasa) împiedică ruperea, iar betonul (umplutura) se opune turtirii și nu permite strivirea armaturii. Ca rezultat, toată construcția este mult mai trainică decât metalul și betonul luate aparte [5].

3. Clasificarea țesuturilor mecanice

Una dintre trăsăturile generale ale elementelor componente țesutului mecanic reprezintă celulele prozenchimatice cu peretele îngroșat, grupate în cordoane sau fascicule. În corespundere cu modul de îngroșare a pereților celulari, se deosebesc două tipuri de țesut mecanic: colenchim și sclerenchim.

Colenchimul reprezintă un țesut format din celule vii, asemănătoare, mai mult sau mai puțin alungite, cu peretele nelignificat și neuniform îngroșat. Acest țesut apare la începutul dezvoltării ontogenetice ale plantei, fiind adaptat pentru funcția de susținere a organelor în perioada de creștere (tulpini, frunze și unele piese florale). Pe lângă rezistență, colenchimul mai este considerat un țesut flexibil și plastic, iar plasticitatea lui scade odată cu vârsta plantei [4].

În organele aeriene (frunză, tulpină) ale multor magnoliofite lemnoase (plante superioare cu flori) se întâlnește un alt tip de țesut mecanic, numit sclerenchim, format fie

© Chiriac Eugenia, Grigorcea Sofia, Nedbaliuc Boris, 2022

din elemente (celule) izolate, numite idioblaste, fie din elemente (celule) grupate în cordoane sau fascicule, localizate în diferite poziții, specifice pentru fiecare specie.

La unele monocotiledonate, cum ar fi de exemplu, porumbul (Zea sp.), sclerenchimul este situat sub epidermă și formează un inel, care înglobează o parte din fasciculele conducătoare. În tulpina de secară (Secale sp.), ca și la porumb, sclerenchimul se află de asemenea sub epidermă, dar se deosebește prin faptul că inelul de sclerenchim este întrerupt de „insulițe" de țesut de asimilație, bogat în clorofilă (fig. 1.). Ca și la porumb, locul ocupat de sclerenchim este voluminos și situat la periferia tulpinii, ceea ce-i redă duritate și elasticitate.

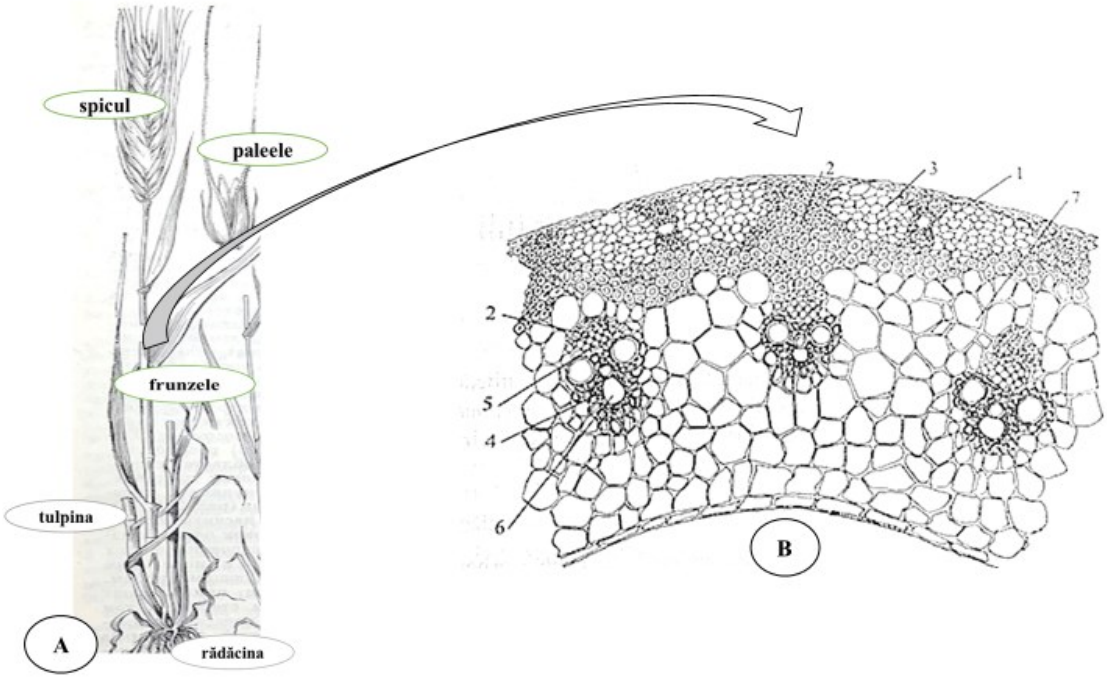


Figura 1. Schema plantei de secară (Secale sp.):

A. Aspectul morfologic; B. Fragment din secțiunea transversală prin tulpina de secară: 1 - epiderma; 2 – sclerenchimul; 3 – colenchimul; 4 – fascicul conducător; 5 – floemul; 6 – xilemul; 7 – parenchimul fundamental

La dicotiledonate, se întâlnesc cordoane formate din fibre de sclerenchim localizate în majoritatea cazurilor la polurile fasciculelor conducătoare (fie polul liberian sau cel xilemic). Cele mai răspândite fibre de sclerenchim sunt cele xilemice, prezente în lemnul secundar de la toate angiospermele dicotiledonate

4. Fibrele de sclerenchim, în tehnică, reprezintă fibrele textile

La multe plante superioare cu flori, fibrele de sclerenchim sunt lungi, fusiforme, având peretele celular (caracteristic numai pentru celula vegetală) lignificat, rar, peretele rămâne aproape celulozic, mai rar, se lignifică slab și parțial (fig.2).

Din punctul de vedere al biologiei celulei, peretele celular (anvelopa celulară) este un constituent cu multiple funcții, printre care se poate menționa și rolul de citoschelet extern conferind celulei rigiditate, durabilitate și elasticitate [3].

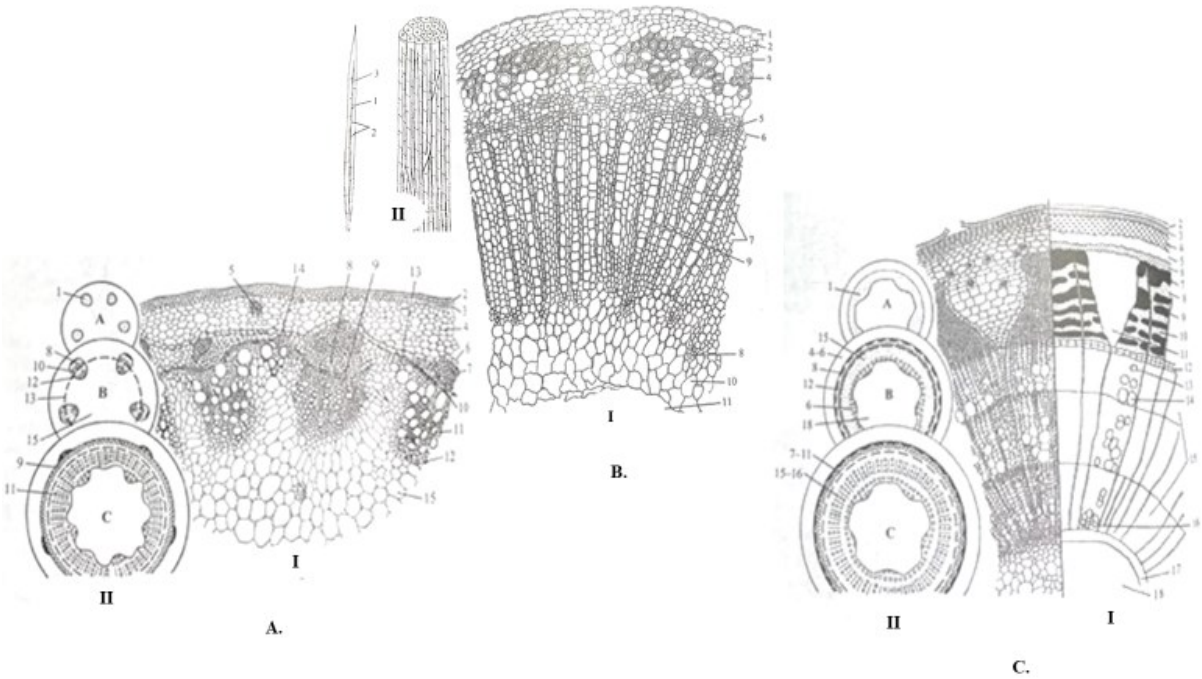


Figura 2. Localizarea fibrelor de sclerenchim în tulpina unor specii de plante superioare cu flori (secțiune transversală):

A. Secțiune transversală prin tulpina de floarea-soarelui (I), respectiv, schema structurii tulpinii la diferite niveluri (II): secțiune la nivelul apariției: procambiului (A); la nivelul apariției cambiului (B); la nivelul structurii definitivate (C): 1-procambiu; 2-epiderma; 3-colenchim; 4-parenchim cortical; 5-canal rezinifer; 6-endoderma; 7-sclerenchim; 8-floem primar; 9-floem secundar; 10-cambiu fascicular; 11-xilem secundar; 12-xilem primar; 13-cambiu interfascicular; 14-fascicul din cambiu interfascicular; 15-măduva;
B. Secțiune transversală prin tulpina de in (I): 1-epiderma; 2-parenchimul scoarței primare; 3-endoderma; 4-fibre liberiene; 5-floem; 6-cambiu; 7-xilem secundar; 8-xilem primar; 9-rază medulară; 10-parenchimul măduvei; 11-cavitate;Fibre sclerenchimatice în tulpina de in (II): fibră în secțiune longitudinală (la stânga); fascicul de fibre sclerenchimatice (fibră tehnică) la dreapta;
1 – lumen; 2 – punctuațiuni; 3 – perete celular (anvelopă);
C. Secțiune transversală prin tulpina de tei (I), respectiv; schema structurii tulpinii la diferite niveluri (II): secțiune la nivelul apariției: procambiului (A); la nivelul apariției cambiului (B); la nivelul structurii definitivate (C): 1-procambiu; 2-epiderma; 3-felem; 4-colenchim; 5-parenchim cortical; 6-endoderma; 7-zona periciclică; 8-floem primar; 9-sclerenchim; 10-floem secundar (tuburi ciuruite); 11-rază medulară; 12-cambiu; 13-lemn de toamnă; 14-lemn de primăvară; 15-xilem secundar; 16-xilem primar; 17-zonă perimedulară; 18-măduvă

Principalul component al anvelopei celulare este celuloza, urmată de hemiceluloze: pectina și lignina, conținutul cărora variază în dependență de specie și gradul de maturitate a celulei. Peretele celular poate fi format din mai multe straturi (cel puțin trei), deosebindu-se fiecare dintre ele printr-o altă orientare a microfibrelor alcătuitoare. Hemicelulozele și pectinele au proprietatea de a cimenta aceste microfibrile, la fel cum în

© Chiriac Eugenia, Grigorcea Sofia, Nedbaliuc Boris, 2022

betonul armat folosit în construcții, cimentul conferă soliditate scheletului metalic din oțel [4].

Conform studiilor specialiștilor fizicieni, tulpina poate fi comparată cu o construcție inginerească asemănătoare unei țevi, în care elementele mecanice sunt repartizate la periferia organului (sub epidermă, sau puțin spre interior, iar centrul este ocupat de parenchim sau este reprezentat de o cavitate), ceea ce înseamnă o economie de material.

Fibrele nu numai că sunt esențiale pentru ingineria structurală a plantelor, ci au o importanță economică considerabilă. De exemplu: fibrele cu textură moale din tulpinile plantelor de in sunt toarse în fir, apoi țesute în pânză de in; fibrele grosiere din tulpinile de cânepă, frunzele de in din Noua Zeelandă și agava sunt folosite la fabricarea frânghiei și pânzei de sac; țesuturile fibroase dintr-o mare varietate de specii de plante sunt, de asemenea, folosite la fabricarea de coșuri, covorașe, perii și hârtie.

Spre deosebire de fibrele analizate mai sus, fibrele de bumbac sunt diferite ca compoziție și origine. Pereții celulelor lor sunt alcătuiți numai din celuloză, iar fibra este o prelungire lungă a unei celule epidermice din învelișul (tegumentul) semințelor. Ele sunt folosite pentru fabricarea diverselor produse și articole, precum: hârtie, ață groasă (sfoară) și îmbrăcăminte. De altfel, celuloza extrasă din bumbac amestecată cu lemn este folosită la fabricarea unor fibre sintetice pentru articole vestimentare [1,4].

Alte materiale sintetice, cum ar fi nailonul și poliesterii, sunt amestecuri realizate din produse petroliere în laboratoarele chimice. Deoarece petrolul este derivat din transformarea geologică a plantelor fosile, chiar și fibrele sintetice sunt, indirect, produse vegetale [1].

Concluzii

Interconexiunea dintre biologie și alte științe contribuie esențial la progresul tehnico-științific. În așa mod abordările inter/transdisciplinare reprezintă o necesitate stringentă în procesul de studiere a biologiei moderne aducându-și aportul astfel la o înțelegere mai complexă a fenomenelor și proceselor biologice. Credem că prin intermediul obiectului de cercetare examinat mai sus am reușit să dezvăluim mai profund diversele sale caracteristici, deoarece a fost studiat din mai multe perspective, aplicând cunoștințe și informații din diferite științe. Identificarea și dezvoltarea acestor legături în opinia noastră trebuie să fie interactive și împreună să creeze o imagine mai clară și o înțelegere mai profundă a realității și vieții pe pământ.

Să nu uităm că chiar dacă precizia și versatilitatea microcipurilor de calculator și a altor produse ale tehnologiei umane sunt demne de lăudat, totuși supremația este menținută în continuare de organizarea complexă și precizia funcțională a celulelor și țesuturilor chiar și în cel mai modest organism vegetal.

© Chiriac Eugenia, Grigorcea Sofia, Nedbaliuc Boris, 2022

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. CAPON, B. *Botany for gardeners*. Third edition. Portland-London: Timber Press, 2010.
2. *Enciclopedia Universală Britanică*. București: editura Litera, vol.3, 2010.
3. GRATI, V.; PULBERE, E. *Anatomia și morfologia plantelor. Compendiu de lucrări practice*. Chișinău: Prut Internațional, 2008.
4. TOMA C.; COSTIN I. *Histologie vegetală*. Iași: Editura Junimea, 2000.
5. ВАСИЛЬЕВ, А. Е.; ВОРОНИН, Н. С.; ЕЛЕНЕВСКИЙ, А. Г.; СЕРЕБРЯКОВА, Т. И.; ШОРИНА, Н. И. *Ботаника. Морфология и анатомия растений*. 2-е издание. Москва: „Просвещение", 1988.

© Chiriac Eugenia, Grigorcea Sofia, Nedbaliuc Boris, 2022

CZU: 37.016:004

PARADIGME MODERNE ÎN DEZVOLTAREA ȘI ÎNVĂȚAREA INTELIGENȚEI ARTIFICIALE

Liubomir CHIRIAC
Eugenia CHIRIAC
Natalia LUPAȘCO
Maria PAVEL
Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale, Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: llchiriac@gmail.com, eugeniachiriac@gmail.com,
nlupashco@gmail.com, pruteanupavel@gmail.com

Rezumat. În acest articol sunt examinate diverse aspecte care țin de conceptele de bază ale Inteligenței Artificiale (IA), se studiază unele aspecte privind realizarea cercetărilor în domeniu IA din perspectiva Testului Turing, cât și metodele de învățare ale IA. Sunt punctate avantajele și dezavantajele IA comparativ cu Inteligența Umană.
Cuvinte cheie: Inteligență Artificială (IA), testul Turing, metode de învățare.

Abstract. In this article, various aspects related to the basic concepts of Artificial Intelligence (AI) are examined, some aspects of conducting research in the field of AI are studied from the perspective of the Turing Test, as well as the learning methods of AI. The advantages and disadvantages of AI compared to Human Intelligence are pointed out.
Keywords: Artificial Intelligence (AI), Turing test, learning methods.

1. Conceptul de Inteligență Artificială (IA). De ce este importantă IA?

Elemente care se referă la tehnologiile de IA există în lume mai bine de 50 de ani. Însă odată cu creșterea puterii de calcul ale calculatoarelor, posibilitatea de a prelucra cantități impresionante de date și elaborarea unor algoritmi noi de ultima generație au condus la progrese importante în domeniul IA. În prezent IA este considerată un domeniu prioritar al transformării digitale a societății și este o prioritate pentru lumea modernă [1-8].

În acest sens, au fost multe încercări de a răspunde la întrebarea: Ce este Inteligența Artificială (IA)? Dificultatea cea mai mare în acest sens vine de la faptul, credem noi, că nu există o definiție foarte exactă referitor la Inteligența naturală care, ulterior, prin analogie ar putea fi definită și IA. Așa dar, să examinăm mai detailat aspectele menționate.

Conform **dex on line**, inteligența este capacitatea de a înțelege ușor și bine, de a sesiza ceea ce este esențial, de a rezolva situații sau probleme noi pe baza experienței acumulate anterior (https://dexonline.ro/definitie/inteligenta).

În conformitate cu clasificările actuale care vin din psihologia modernă există următoarele tipuri de inteligență:

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

1. Inteligența vizual-spațială

Caracteristici: Pasiune pentru scris si citit; Înclinație către rezolvarea puzzle-urilor; Recunoașterea anumitor tipare; Talent la desen sau arte vizuale.

2. Inteligența lingvistică

Caracteristici: Memorare si reproducere a informației orale sau scrise; Pasiune pentru citit si scris; Talent la dezbateri sau discursuri persuasive; Utilizare a umorului in istorisire.

3. Inteligența logic-matematică

Caracteristici: Capacitate sporită de rezolvare a problemelor; Inclinație către gândirea abstractă; Plăcere pentru experimente științifice; Talent la rezolvarea problemelor complexe.

4. Inteligența corporal-chinestezică

Caracteristici: Talent la dans și sport; Pasiune pentru confecționarea obiectelor cu propriile mâini; Coordonare fizică sporită; Capacitate de a memora lucruri prin acțiune.

5. Inteligența muzicală

Caracteristici: Pasiune pentru cântat si instrumente muzicale; Recunoaștere facilă a tiparelor muzicale și a tonurilor; Memorare și reproducere a melodiilor; Înțelegere sporită a structurii muzicale, a ritmului și a notelor.

6. Inteligența interpersonală

Caracteristici: Capacitate superioară de comunicare verbală; Talent la comunicarea non-verbală; Viziune din multiple perspective a situațiilor; Crearea unor relații sociale pozitive; Abilități la evaluarea emoțiilor, a motivațiilor, dorințelor și intențiilor celor din jurul lor; Talent la armonizarea conflictului in diverse grupuri.

7. Inteligența intrapersonală

Caracteristici: Talent la analizarea propriilor slăbiciuni și a punctelor tari; Pasiune pentru analizarea teoriilor și ideilor; Conștientizarea propriilor sentimente și gânduri; Înțelegerea clara a propriilor motivații; Înclinație către auto-reflecție și analiză.

8. Inteligența naturalistă

Caracteristici: Inclinație către domenii precum botanica, zoologie, biologie; Talent pentru observarea detaliilor; Abilități pentru clasificarea și catalogarea informației; Pasiune pentru grădinărit, camping si explorarea mediului.

În contextul celor punctate mai sus cercetătorii în domeniu au evidențiat următoarele caracteristici importante pentru orice tip de inteligență:

- inteligența este măsurabilă;
- inteligența se manifestă ca rapiditate în învățare;
- inteligența se leagă de randament.

Aspectele menționate mai sus caracterizează din anumite perspective și IA.

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

Poate oare inteligența artificială să posede la un nivel foarte avansat una din cele 8 tipuri de inteligențe umane punctate? Să ne imaginăm un robot care posedă Inteligență logic-matematică și este un superb maestru la jocul de șah. Pe bune un astfel de robot a fost construit în premieră în anul 1996 de către Compania IBM și care purta numele de Deep Blue. Tot în anul 1996 campionul mondial de șah Garry Kasparov a jucat la Philadelphia primul meci împotriva supercomputer-ului IBM Deep Blue, pe care la câștigat cu scorul 4-2. Meciul revanșă a fost jucat în New York City în 1997 și a fost câștigat de Deep Blue cu scorul 3½–2½. Aceasta a fost prima înfrângere a unui campion mondial de șah de către un computer, demonstrând superioritatea IA. Înseamnă oare că Inteligența Artificială depășește deja Inteligența Umană? Se schimbă interpretările despre conceptul IA? Să încercăm să înțelegem cum evaluează conceptul de IA.

IA este un concept mai mult decât complex aflat într-o evoluție continuă. IA nu înseamnă nici pe de parte replicarea și transformarea minții umane într-un chip. IA, în opinia noastră, ar înseamnă mai degrabă înțelegerea și replicarea experienței umane vis-a-vis de responsabilitatea interacțiunilor dintre om-om și om-natură. Inteligența artificială este studiul procesului prin care sistemele tehnice, inclusiv calculatoarele, pot fi „învățate” să facă lucruri care, pentru moment, sunt realizate mai bine de oameni. Bine, dar cum totuși poate fi definită IA?

Celebrul informatician american Marvin Lee Minsky (9 august 1927 – 24 ianuarie 2016) unul din cercetătorii pioneri în domeniul inteligenței artificiale, co-fondator al laboratorului de Inteligență Artificială al Institutului de Tehnologie din Massachusetts, întrebat ce este IA, a răspuns: „Există întotdeauna persoane care au nevoie să definească totul pentru a realiza ceva. De ce?”. Mai jos vom încerca totuși să identificăm o definiție relevantă pentru IA.

2. Ce este Inteligența Artificială?

Se consideră că Inteligența Artificiala este un domeniu al informaticii care dezvoltă sisteme tehnice capabile să rezolve probleme dificile legate de inteligența umană.

În termeni tehnici, **inteligenta artificiala este o ramură a tehnologiei** care permite programarea și proiectarea atât a sistemelor hardware cât și a celor care permit echiparea unor tehnologii cu anumite **caracteristici care sunt considerate tipic umane**.

Oricum, în prezent, **prin IA se înțelege capacitatea unei mașini de a imita funcții umane, cum ar fi raționamentul, învățarea, planificarea și creativitatea** [7].

Sistemele tehnice dotate cu IA interacționează prin intermediul propriilor senzori cu mediul înconjurător și colectează informația primită, o prelucrează și analizând datele recepționate, reacționează adaptându-și compartimentul și acționând autonom.

Ca orice știință, Inteligența Artificiala studiază o serie de probleme cu caracteristici generale comune și dezvoltă tehnici specifice de rezolvare a acestor probleme.

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

Inteligența artificială versus inteligența naturală

Valoarea potențiala a IA poate fi înțeleasa mai bine dacă punem în contrast inteligența artificială și inteligența naturală, umană.

Tabel. Avantajele și dezavantajele IA comparativ cu Inteligența Umană Naturală

Avantajele IA comparativ cu Inteligența Umană Naturală	
Inteligența artificială	**Inteligența naturală**
Este permanentă (informația procesată nu poate fi pierdută).	Inteligenta umana naturala este perisabila (unei angajați pot uita informația).
Poate fi repartizată, promovată și difuzată prin intermediul rețelelor ori calculatoarelor.	Transferul cunoștințelor de la persoană fizică la altele este un proces al cunoașterii și necesită timp.
Poate presta o serii de servicii mai ieftin ca preț comparativ cu inteligența naturală.	De exemplu, vinderea biletelor on line de către robot este un serviciu mai ieftin comparativ cu munca umană. Ori traducerea unui text in engleză prin intermediul serviciilor unui translator poate fi mai scump decât cu ajutorul unui program specializat.
IA fiind o tehnologie computerizata este consecventă și organizată.	Inteligența naturala este dezorganizată și nu întotdeauna consecventă.
IA poate soluționa mai multe sarcini și mai repede comparativ cu omul.	Inteligența umană este mai lentă în îndeplinirea anumitor sarcini. De exemplu calculul numeric ori calculul modular al numerelor mari.
Dezavantajele IA comparativ cu Inteligența Umană Naturală	
IA este în genere mai puțin inspirată și cu mare dificultate ori chiar deloc nu poate găsi soluții neordinare la probleme dificile.	Inteligența naturală este creativă și poate identifica soluții neordinare la probleme nestandarde.
IA nu este autodidactă. Cunoașterea pentru IA este construită cu mare atenție în sistem de experții în domeniu.	Omul este autodidact. Abilitatea omului de a căpăta cunoștințe este înnăscută pentru ființele umane.
IA este în afara oricăror emoții cu excepția cazurilor când emoțiile sunt exprimate prin algoritmii elaborați.	Inteligența umană nu poate să se dezvolte în afara spațiului emoțional și al culturii general-umane.

Așa dar, cum măsurăm, identificăm inteligența unui program ori a unei mașini?

3. Testul Turing

Unul dintre cele mai cunoscute teste privind determinarea gradului de inteligență a unui program este *testul Turing*. În anul 1950, matematicianul englez Alan Turing (1912-1954), a propus, în premieră, un test pentru a determina dacă o mașină (calculator) poate avea, sau nu, un comportament inteligent.

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

Turing a pornit de la o idee firească - dacă nu știm să definim în termeni preciși inteligența, însă putem zice despre om că este inteligent, atunci am putea să spunem și despre o altă „creatură" același lucru în cazul în care s-ar comporta la fel ca o ființa umană. Să clarificăm care din aspectele comportamentului omenesc sunt într-adevăr relevante pentru inteligență.

În celebrul său articol *„Computing Machinery and Intelligence"*, publicat în anul 1950, Turing a lansat în premieră problema posibilității simulării ființei umane cu ajutorul calculatorului. În același articol, Turing descrie și testul care se reduce la determinarea de către Om a unui comportament inteligent și unul neinteligent în raport cu calculatorul dotat cu IA.

Testul Turing este un „joc al imitației" lansat de Turing care presupune implicarea a 3 actori: o mașină (robot ori calculator) dotat cu IA (C), și două persoane (P1) și (P2). Este important de menționat că pentru actorii respectivi se îndeplinesc următoarele condiții:

- (C), (P1) și (P2) se află în oficii diferite.
- (C), (P1) și (P2) comunică doar în scris prin intermediul terminalelor (calculatoarelor) folosind limbajul natural.
- (P2) nu știe care dintre ceilalți doi actori este calculator și care este om.
- (P2) nu știe și nu poate să îi vadă sau să le vorbească direct.

Conform testului Turing, obiectivul persoanei (P2) este să deosebească calculatorul (C) de omul (P1), pe baza răspunsurilor la orice fel de întrebări recepționate la terminal. Dacă (P2) nu reușește să deosebească calculatorul de Om, după răspunsurile recepționate atunci comportamentul calculatorului (C) poate fi considerată inteligent. În caz contrar comportamentul nu este inteligent.

Problema cea mai semnificativă în procesul de elaborare a unui astfel de program se referă la faptul că nu se cunoaște cantitatea de informație necesara care trebuie „încorporată" în program ca ulterior să fie capabil să treacă testul Turing.

Programul Superinteligent de pe calculator trebuie să imite comportamentul uman, luând în considerare spectrul enorm de larg al întrebărilor posibil de adresat cât și faptul că acestea sunt puse în limbaj natural. Ceva de neimaginat! Oricum, se crede că se va ajunge și la acest moment.

În anul 1950 când a fost publicat testul Turing, autorul prognoza că aproximativ în anul 2000 va exista un calculator capabil să aibă un comportament inteligent încât ar avea șansa de 30% să păcălească persoana (P2) pentru 5 minute.

În prezent experții în domeniul IA se împart în două tabere în raport cu prognoza respectivă. Unii consideră că în viitorul apropiat se va inventa calculatorul care va trece testul Turing și alții care sunt convinși de contrariu.

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

Ca să încheiem acest subiect trebuie să subliniem faptul că testul Turing, care este de un șarm intelectual deosebit, simbolizează idealul pe termen lung al inteligenței artificiale ca ramură a informaticii. Până la acest moment nici o mașină (robot) nu a trecut testul Turing.

Turing considera că cea mai bună cale spre inventarea unei astfel de mașini care să treacă testul Turing nu este programarea unui calculator dotat cu o mulțime fixă de cunoștințe, ci, mai degrabă, elaborarea unei mașini-autodidacte, capabilă să învețe din propria experiență și să utilizeze limbajul natural ca să-și îmbogățească cunoștințele.

Calculatorul-autodidact superinteligent ar putea să-și rezolve propriile probleme și să-și realizeze propriile sale planuri, demonstrând inteligența practică în viața de zi cu zi.

Astfel, ideile lui Turing referitor la caracteristicile mașinii-autodidacte superinteligentă s-au constituit și dezvoltat, ulterior, în subdomenii ale inteligenței artificiale:

- **Reprezentarea cunoștințelor** *(Rețele semantice; Sisteme bazate pe logică; Rețele neuronale).*
- **Prelucrarea limbajului natural scris** *(Handwriting recognition. Înțelegerea limbajului scris; Sisteme de traducere automata; Sisteme de extragerea informațiilor din texte; Sisteme de rezumare de texte; Sisteme pentru clasificat documente).*
- **Raționamente** *(Demonstrarea automată a teoremelor; Web semantic; Raționament ce implică timp și spațiu).*
- **Recunoașterea vorbirii** *(Speech recognition, Generarea vorbirii, inclusiv generarea de voci cu emoții; Înțelegerea vorbirii, inclusiv cu accent pe înțelegerea vocilor izolate; înțelegerea vocilor în medii cu zgomot, urmărirea unui vorbitor într- un grup).*
- **Identificarea și interpretarea imaginilor** *(Face identification and recognition, Recunoașterea formelor, persoanelor în imagini; Recunoașterea similarității între obiecte identificate în imagini; Segmentarea imaginilor (în părți semnificative), împachetarea imaginilor; Indexarea imaginilor).*
- **Interpretarea secvențelor video** *(Recunoașterea persoanelor/formelor într-o secvență, Urmărirea personajelor în imagini).*
- **Robotica** *(Sisteme de articulație, de echilibru etc.).*
- **Învățare** *(Supervizată, Nesupervizată, Hibridă, Învățare cu algoritmi genetici, Metode inspirate din natura, Metode statistice, Mașini pe vectori suport (PSO, ACO), Calcul cuantic, Data Meaning).*

În alt context, se poate afirma că testul Turing „impune” ca inteligența mașinilor să modeleze inteligența umană. Unii experți în domeniul IA susțin că inteligența mașinilor este o formă diferită de inteligența umană și că, de fapt, este o eroare să tindem a o evalua

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

în termenii inteligenței umane. Se vrea oare construirea unei mașini capabile să simuleze activitatea socială a unui om și care să fie la fel de lentă în raționamente ca și omul? Toate aceste întrebări rămân pentru moment fără un răspuns clar.

4. Cum se poate învăța Inteligența Artificială?

Așa dar, care sunt metodele de învățare ale inteligenței artificiale? Evidențiem următoarele:

Machine Learning (învățarea mecanică) care reprezintă o parte importantă a sistemelor de IA, prin care calculatoarele primesc o cantitate enormă de informații pe care o stochează, analizează, memorează și pe baza cărora reacționează. În acest sens un exemplu concret sunt asistenții virtuali care pot recunoaște comenzile vocale, cum ar fi, bunăoară, Siri de la Iphone Apple ori Alexa de la Amazon.

Deep Learning (învățarea profundă) reprezintă o metodă de învățare mecanică, dar mult mai profundă, prin care calculatoarele sunt învățate să se comporte ca un om, adică să învețe din experiențe. De exemplu, automobilele SMART de ultima generație care circulă singure și pot recunoaște indicatoarele de circulație și care fac diferența între diverse obiecte – autoturisme, piloni, zebre, semafoare, inclusiv pietoni. Prin intermediul învățării profunde, calculatoarele pot să învețe direct din texte, imagini, sunete etc. De exemplu, Google și Amazon folosesc metode de *Deep Learning* pentru dezvoltarea algoritmilor de recunoaștere a imaginilor în scopul efectuării analizelor preferințelor utilizatorilor, în funcție de alegerile și reacțiile lor, în raport cu anumite informații ori produse și, ulterior, în a oferi diverse variante pe baza analizelor respective.

Neural networks (rețelele neurale) – reprezintă esența Inteligenței Artificiale, fără de care nu s-ar produce niciun proces de învățare. **Rețelele neurale**, inspirate de rețelele de neuroni din creierul uman, sunt interconectate prin algoritmi. Creierul uman poate executa activități complexe, în primul rând datorită faptului, că are sute de miliarde de neuroni legați între ei prin sinapse. Chiar dacă aproape este imposibil de replicat rețelele de neuroni datorită complexității incredibile a lor din creierul uman, totuși rețelele de neuroni reprezintă cel mai bun obiect de studiu pentru oamenii de știință, în încercarea lor de a dezvolta rețelele neurale ale IA.

Chiar dacă rețelele neurale avansează continuu, va trece încă mult timp până când IA va demonstra o inteligență comparabilă cu cea umană. Și, evident, va trece și mai mult timp până când IA va fi în stare să înțeleagă dorințele și gândurile altor oameni și pe care să le folosească pentru a înțelege și a interpreta comportamentul uman de care vorbisem mai sus. Este clar că va trece și mai mult timp până când IA va avea abilitatea de a fi autodidact, recunoscându-se ca individualitate. Înainte de a putea programa o mașină să gândească precum mintea umană este absolut necesar să înțelegem cum funcționează

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

rațiunea umană de fapt, și abia ulterior să putem măcar să o învățăm să imite mintea umană și comportamentul uman.

Astăzi, programele de inteligență artificială, cum ar fi bunăoară, Siri de la Apple și Alexa de la Amazon demonstrează adevărate abilități intelectuale în soluționarea diverselor probleme cotidiene. Astfel, Siri poate să răspundă la diverse întrebări care țin de cultura general umană, poate să îți reamintească anumite lucruri și să stabilească întâlniri de lucru. Iar Alexa poate să pornească aerul condiționat în apartament, să conecteze lumina în casă ori să pună muzica preferată.

Programele respective bineînțeles sunt impresionante dar ele nu sunt creative și sunt în stare să facă doar atât cât sunt programate. Din aceste considerente sistemele de IA existente în acest moment poartă denumirea **Weak AI** sau **Narrow AI**, ori **Artificial Narrow Intelligence** (**ANI**) („inteligență artificială slabă” sau „îngustă”).

Menționăm faptul că **ANI** poate imita modul în care oamenii gândesc și comunică dar nu are abilitatea de a face raționamente, de a gândi. **ANI** poate doar să facă niște conexiuni în funcție de programul pe care îl are. Dar totuși, **ANI** reprezintă deja un pas foarte important în evoluția inteligenței artificiale și se îndreaptă spre **Artificial General Intelligence (AGI).**

AGI vor fi programele capabile să raționeze, să planifice și să îndeplinească procese complexe care ulterior se vor orienta către **Artificial Super Intelligence (ASI)** – programe care să depășească întreaga inteligență creativă a omenirii. Incredibil – dar nu imposibil!

5. Aspecte în evoluția Inteligenței Artificiale. Eventualele pericole ale IA asupra societății

Subiectul cel mai discutat de experții IA tine de următoarea întrebare: Ce se va întâmpla când IA va depăși inteligența umană? În acest context, matematicianul John von Neumann a introdus termenul *Singularitate tehnologică*, care evidențiază momentul când Superinteligența Artificială va deveni superioară Inteligenței Umane. Acest epizod nu exclude și faptul că Superinteligența Artificială poate să aibă un comportament agresiv în raport cu omenirea. Astfel, cercetătorul Stuart Armstrong de la Institutul Future of Humanity a estimat că în anul 2040 va fi atins acest moment și se va produce Singularitatea tehnologică. Personalități din domeniu Stephen Hawhing, Bill Gates, Steve Jobs, Stuart Russell, Elon Musk și-au exprimat îngrijorarea în legătură cu acest moment [2-6].

În cartea *„The Structure of Scientific Revolutions”,* publicată în anul 1962, fizicianului și filosofului american **Thomas Samuel Kuhn** (1922-1996) spunea că paradigmele științei reprezintă: *„Realizări științifice care generează modele care, pe o perioadă mai mult sau mai puțin lungă, și într-un mod mai mult sau mai puțin explicit,*

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

ghidează dezvoltarea ulterioară a cercetării exclusiv în căutarea soluțiilor la problemele puse de acestea”.

Paradigmele moderne IA, prin tot ce se inventează, descoperă, elaborează și se produce în prezent, orientează **Artificial Narrow Intelligence** spre o nouă etapa calitativă **Artificial General Intelligence**.

Așa dar, în loc de concluzii, putem afirma că IA în propria dezvoltare își propune la modul ideal să determine cum pot calculatoarele să devină la fel de inteligente ca oamenii. O măsură a inteligenței mașinii, așa cum am examinat anterior, este testul Turing. Până la moment nici o mașină inteligentă nu a reușit să treacă testul respectiv. In imediatul viitor nu se conturează posibilitatea ca vreo mașină să treacă acest test. Inteligența Artificială este la etapa timpurie de dezvoltare. Cele mai mari invenții și descoperiri în domeniul IA se vor produce în viitorul apropiat. Să fim pregătiți pentru era mașinilor dotate cu **Artificial General Intelligence** care vor poseda o Superinteligență Artificială. Istoria inteligenței artificiale se scrie în fiecare zi.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. DUMITRESCU, D. Principiile Inteligentei Artificiale. Cluj-Napoca: Editura Albastra, 2002.
2. POOLE, D. L.; MACKWORTH, A. K. *Artificial Intelligence Foundations of Computational Agents*. Cambridge University Press, 2010. Disponibila online: https://artint.info/2e/html/ArtInt2e.html
3. Curs online la Inteligenta Artificiala predat de Sebastian Thrun și Peter Norvig: https://www.udacity.com/wiki/cs271/downloads
4. ГРАЕ, Д. *Наука о данных с нуля*: Пер. с англ. СПб.: БХВ-Петербург. 2017. 336 с.
5. ВАНДЕР, П. Дж. *Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение*. СПб.: Питер, 2018. 576 с.
6. ЖЕРОН, О. *Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем*. Пер. с англ. СпБ.: ООО "Альфа-книга", 2018. 688 с.
7. Agenția pentru Drepturi Fundamentale ale Uniunii Europene. Despre Inteligența Artificială și BigData. https://fra.europa.eu/en/themes/artificial-intelligence-and-big-data

© Chiriac Liubomir, Chiriac Eugenia, Lupasco Natalia, Pavel Maria, 2022

CZU: 37.016:51+004

ASPECTE DIDACTICE PRIVIND STUDIEREA ALGORITMULUI DE CRIPTARE RSA, FUNCȚIILOR HASH ȘI SEMNĂTURII DIGITALE

Liubomir CHIRIAC
Aurel DANILOV
Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: llchiriac@gmail.com, a.danilov@uasm.md

Rezumat. În lucrare autorii abordează problema pregătirii specialiștilor informaticieni, din perspectiva studierii fundamentelor matematice, inclusiv teoriei numerelor și aplicării conceptelor și metodelor matematice în criptografie. În procesul de predare-învățare a cursului "Programarea structurilor algebrice. Aplicații în criptografie" este examinat, nemijlocit, și procesul de aplicare a conceptelor matematice în criptografie. În lucrare sunt examinate din punct de vedere metodic etapele de implementare a algoritmului de criptare RSA, proprietățile funcției hash și a algoritmului de generare a semnăturii digitale.
Cuvinte cheie: concepte matematice, metode de criptare și decriptare a informației, algoritm RSA, funcția hash, semnătura digitală.

Abstracts. In the paper, the authors address the issue of training computer scientists, from the perspective of studying mathematical foundations, including number theory and the application of mathematical concepts and methods in cryptography. In the teaching-learning process of the course "Programming algebraic structures. Applications in cryptography" the process of applying mathematical concepts in cryptography is directly examined. In the paper, the implementation stages of the RSA encryption algorithm, the properties of the hash function and the digital signature generation algorithm are methodically examined.
Keywords: mathematical concepts, information encryption and decryption methods, RSA algorithm, hash function, digital signature.

1. Conexiuni dintre matematică, informatică și criptografie

În perioada actuală criptografia este unul dintre cele mai importante domenii care se ocupă de studiul mecanismelor de protecție, transmitere și recepționare a informației, în scopul asigurării unui nivel avansat de încredere în informație. Altfel spus, de nivelele mecanismelor de securitate a informației depinde și încrederea în informația recepționată.

În acest sens, pentru elaborarea algoritmilor și în mod special al algoritmilor criptografici se folosesc o serie de concepte matematice. În procesul de predare-învățare a cursului „**Programarea structurilor algebrice. Aplicații în criptografie”**, în cadrul facultății de fizică, matematică și tehnologii informaționale, Universitatea de Stat din Tiraspol, se pune accentul pe studierea și înțelegerea unei serii de concepte, noțiuni și afirmații matematice. Unul din scopurile cursului respectiv ține de familiarizarea studenților cu programarea structurilor algebrice și fundamentele matematice ale criptografiei. În cursul menționat mai sus sunt examinate din perspectiva informaticii și

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

criptografiei conceptele fundamentale care țin de așa de structuri algebrice, precum: semigrup, quasigrup, grup, inel și corp. La fel sunt studiate un șir de noțiuni și concepte care se referă la teoria numerelor: numere prime, factorizare, elemente de divizibilitate și congruență, indicatorul Euler, algoritmul Euclid extins, etc. Așa cum am menționat conceptele matematice sunt prezentate prin prisma informaticii într-un ritm progresiv, în mod accesibil pentru studenții din domeniul IT, interesați să înțeleagă necesitatea programării structurilor algebrice și esența criptografiei moderne. În articolul respectiv se examinează în mod special algoritmul de criptare asimetrică RSA.

Algoritmul respectiv se bazează pe metodele privind criptarea funcției și determinarea funcției inverse. RSA este prima realizare concretă de algoritm de criptare asimetrică și semnătura digitală. Acest algoritm se bazează pe utilizarea pentru criptare a funcției $\mathbf{f(x) = x^e \bmod n}$, unde n este un produs a două numere prime iar $\boldsymbol{e}$ este un exponent întreg care respectă condiția $\mathbf{1<}\boldsymbol{e}\mathbf{< \varphi(}\boldsymbol{n}\mathbf{)}$ astfel ca $\boldsymbol{cmmdc(e, \varphi(n)) = 1}$. Funcția $\boldsymbol{f(x)}$ este o bijecție și admite ca inversă funcția $\mathbf{f^{-1}(x)= x^d \bmod n}$, care va fi utilizată la decriptare, **d** este un întreg care satisface relația $\boldsymbol{ed} \equiv \mathbf{1 \bmod \varphi(n)}$. Desigur că inversarea acestei funcții este posibilă dacă se cunoaște factorizarea lui n [1-8].

2. Ce este semnătura digitală?

Semnătura digitală (electronică) este un algoritm matematic utilizat pentru demonstrarea autenticității unui document electronic ori mesaj. O semnătură digitală validă confirmă veridicitatea mesajului trimis și autentifică autorul mesajului.

Semnăturile digitale sunt în general utilizate pentru semnarea documentelor, contractelor, în tranzacțiile financiare și în situațiile în care este necesară identificarea eventualelor falsificări sau manipulări.

O semnătură digitală este un algoritm de autentificare electronică, criptat în baza informațiilor digitale și aplicat în cazul documentelor electronice, mesajelor de e-mail etc. Astfel, o semnătură digitală confirmă faptul că:

a) mesajul a fost elaborat, creat de către un expeditor cunoscut (*autentificare*).
b) conținutul mesajului nici într-un caz nu poate fi schimbat ori falsificat de când a fost semnat digital (*integritate*).
c) expeditorul nu poate nega faptul că a expediat documentul (*non-repudiere*).
d) în fișierele de tip pdf, word ori excel semnăturile digitale care au timpul marcat au validitatea unei legalizări (*legalizarea*).

Pentru a dispune de asigurările respective, expeditorul trebuie să aplice semnătura digitală care va satisface următoarele condiții:

- semnătura digitală trebuie să fie validă.
- certificatul asociat semnăturii digitale trebuie să fie neexpirat.
- expeditorul, persoana fizică ori juridică care semnează, este credibilă.

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

În genere algoritmul matematic privind semnătura digitală se bazează pe trei algoritmi:

1. Algoritmul privind *selectarea aleatoare a unei chei private. Cheia privată* va fi asociată unei chei publice care fiind determinate vor fi utilizate în continuare.
2. Algoritmul de *semnare a documentului care bazându-se pe cheia privată* generează semnătura digitală.
3. Algoritmul de *verificare a* semnăturii digitale care acceptă ori poate respinge mesajul de conformitate.

Conceptul semnăturii digitale a fost introdus ca o particularitate a sistemelor de criptare cu cheie publică de către Diffie și Hellman în 1976. Semnăturile digitale realizează conexiunea intre identitatea unei entități și o valoare numerică unică. Orice algoritm asimetric poate fi utilizat pentru crearea unei semnături digitale prin *inversarea rolului cheii publice cu cea privată*, iar primele propuneri de semnături digitale se găsesc în lucrările lui Rivest, Rabin, Adelman cât și ElGamal. Teoretic și unii algoritmi simetrici pot fi folosiți pentru a crea semnături digitale dar mai puțin sunt utilizați în practică.

Pentru o semnătură digitală sunt necesare îndeplinirea a două condiții majore:

- O semnătură digitală generată și o cheie privată determinată anterior trebuie să verifice autenticitatea expeditorului utilizând cheia publică corespunzătoare.
- Nici o altă entitate care nu posedă cheia privată nu ar fi în stare teoretic să genereze o semnătură validă.

3. Algoritmul de criptare RSA

Pentru a înțelege procesul de formare a semnăturii digitale bazată pe algoritmul de criptare RSA vom examina esența algoritmului RSA. Informaticienii de la MIT, Ronald Rivest, Adi Shamir si Leonard Adelman, au revoluționat domeniu, publicând în 1978, în articolul „A Method for Obtaining Dijital Signatures and Public Key Cryptosystems” despre algoritmul RSA, care rămâne unul din cei mai utilizați și mai siguri algoritmi în practică în pofida faptului că în permanență sunt elaborați diverși algoritmi de spargere care, deocamdată, sunt mai puțin eficienți. Algoritmul de criptare RSA se bazează pe noțiuni, concepte și rezultate din teoria numerelor. Algoritmul RSA consta din 3 algoritmi centrali: generatorul de chei, algoritmul de criptare si algoritmul de decriptare [1]. Astfel:

Primul algoritm. *Generatorul de chei*.

- Se generează doua numere prime p si q;
- Se calculează $n = pq$ și se determină indicatorul Euler $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$;
- Se alege aleatoriu un număr e ($1<e<\varphi(n)$) astfel ca cmmdc(e, $\varphi(n)$) = 1;
- Se calculează $d = e^{-1} mod\ \varphi(n)$ (adică $de = 1\ mod\ \varphi(n)$) utilizând algoritmul extins al lui Euclid;

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

- Se fac publice numerele *n* și *e*, adică cheia publica (*e*, *n*). Cheia privata (*d*, *n*) rămâne a fi secretă.

Al doilea algoritm. *Algoritmul de criptare.*

Fie *m* – mesajul exprimat sub forma unui număr natural mai mic decât *n*. Atunci textul criptat, este notat cu *c*, unde $c = m^e \bmod n$.

Al treilea algoritm. *Algoritmul de decriptare.*

Fie *c* – textul criptat. Atunci textul decriptat *m*, este $m = c^d \bmod n$.

Să examinăm aplicarea algoritmului de criptare asimetrică RSA urmărind procesul de criptare/decriptare a unei probleme concrete.

Problema 1. Fie interlocutorul **A** dorește să recepționeze texte criptate de la interlocutorul **B**. Ambii interlocutori folosesc pentru criptare/decriptare:

- alfabet **Al =** {A, L, C};
- mulțimea **A =** {1, 2, 3};
- aplicația bijectivă **F : Al → A** care este determinată de F(A) =1, F(L)=2 și F(C) =3 ori

A	L	C
1	2	3

- aplicația inversă $\mathbf{F^{-1}}$ **: A → Al** care este determinată de:

1	2	3
A	L	C

unde $F^{-1}(1)$ =A, $F^{-1}(2)$=L și $F^{-1}(3)$ =C.

Interlocutorul **A** stabilește: cheia secreta (**d**, **n**) și cheia publica (**e**, **n**).

Alfabetul **Al**, corespondența **F**, cheia publică (**e**, **n**) se transmit interlocutorului **B**, printr-un canal deschis. Să se descrie pașii care trebuie sa fie realizați de:

- interlocutorul **A** pentru generarea cheilor,
- interlocutorul **B** pentru criptarea textului **M** = „LAC”,
- interlocutorul **A** pentru decriptarea textului **M**, folosind sistemul criptografic RSA.

Soluție.

P_1. Se definește alfabetul **Al =** {A, L, C}.

P_2. Se definește mulțimea **A =** {1, 2, 3}.

P_3. Stabilim o corespondență biunivocă între alfabetul **Al** și elementele mulțimii **A**, prin intermediul funcției **F**. Aplicația **F : Al → A** este

A	L	C
1	2	3

aplicația inversă $\mathbf{F^{-1}}$ **: A → Al** este

1	2	3
A	L	C

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

Interlocutorul **A** *efectuează pașii de creare a cheilor publice și private*:

P4. Aleatoriu se selectează două numere prime **p** = **7** și **q** = **11**. Numerele **p** și **q** se testează dacă sunt sau nu prime cu ajutorul algoritmului de factorizare a numerelor impare, metoda de factorizare Fermat.

P5. Se calculează **n** = **p** × **q** = 7 × 11 = **77**, unde **n** este mai mare decât elementul maxim din mulțimea **A**.

P6. Se calculează valoarea funcției Euler

$$\varphi(\mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{77}) = \varphi(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = p^{1-1}(\mathbf{p} - 1) \times \mathbf{q}^{\mathbf{1-1}}(\mathbf{q} - 1) = 6 \times 10 = \mathbf{60}.$$

P7. Se selectează un număr **e** = **7**, unde 1< **e** < **φ**(**n**), **e** este reciproc prim cu **φ**(**n**), adică **cmmdc(7,60)=1.**

P8. Se calculează **d** . Numărul **d** este inversul multiplicativ al lui **e** = 7 (modulo **φ**(**77**)).
Determinăm numărul **d** conform relației d = e^{-1} mod **φ**(**n**) = 7^{-1} mod 60.
Calculăm și obținem d = 7^{-1} mod 60 = 43.

P9. Cheile RSA sunt:
Cheia secretă este perechea (**d**, **n**) = (43, 77).
Cheia publică este perechea (**e**, **n**) = (7, 77);
Cheia publică se transmite interlocutorului **B**.
Interlocutorul **B** *efectuează pașii de criptare a textului secret*:

P10. Din canale cu acces public se preia cheia publică (**e**, **n**) = (7, 33).

P11. Scriem textul secret **M** = {**L**, **A**, **C**}, cu simboluri din alfabetul **Al**, unde **m** = 3 este lungimea textului.

P12. În baza aplicației **F** : **Al** → **A**, pentru fiecare simbol al textului secret, se identifică elementele corespunzătoare din mulțimea **A**, obținând astfel mulțimea de elemente **R**.

M:	L	A	C
R:	2	1	3
	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$

P13. Criptarea se realizează conform formulei $\boldsymbol{c_m = r_m^e}$ $(modulo\ \boldsymbol{n})$. Textul **R** se criptează după cum urmează:
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{r_1^e}$ (modulo **n**) =2^7 modulo 77 = 128 modulo 77 = 51;
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{r_2^e}$ (modulo **n**) =1^7 modulo 77 = 1 modulo 77 = 1;
$\mathbf{c}_3 = \mathbf{r_3^e}$ (modulo **n**) =3^7 modulo 77 = 2187 modulo 77 = 31;
unde **{51, 1, 31}** este textul criptat.
Interlocutorul B transmite textul criptat interlocutorului **A**.
Interlocutorul **A** *efectuează următorii pași de decriptare a textului criptat*:

P14. Decriptarea textului se realizează cu ajutorul cheii secrete (**d**, **n**) = (43, 77) și relației $\mathbf{u_m = c_m^d}$ **mod** n;

P15. Decriptarea textului criptat $c_1, c_2, \ldots, c_m$ se face mai simplu utilizând

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}_1^{\mathbf{d}}$ **mod** n = 51^{43} modulo 77 = 1 modulo 33 = 2;

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{c}_2^{\mathbf{d}}$ **mod** n = 1^{43} modulo 77 = 1 modulo 77 = 1;

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{c}_3^{\mathbf{d}}$ **mod** n = 31^{43} modulo 77 = 1 modulo 33 = 3;

unde { $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$} = {2, 1, 3} este textul decriptat.

P_{16}. Textul se restabilișete folosind aplicația inversă $\mathbf{F}^{-1}$ **: A → Al**:

2	1	3
L	A	C

P_{17}. Afișăm textul secret: **LAC**.

4. Funcțiile Hash criptografice

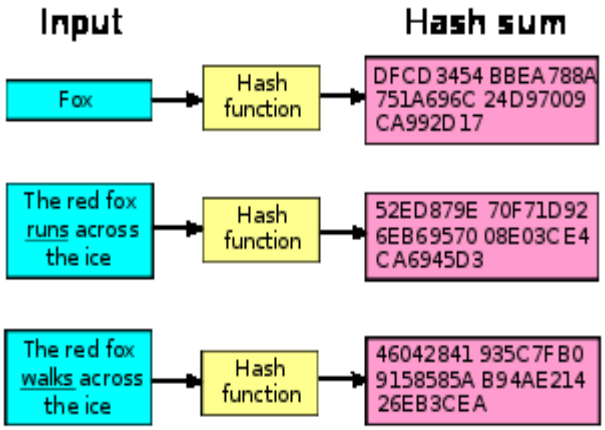
Esența semnăturii digitale poate fi înțeleasă elucidând semnificația funcției hash. Astfel, în sens matematic, **funcțiile hash** (numite și **funcții de dispersie** sau **funcții de rezumat**) sunt funcții definite pe o mulțime cu valori într-o altă mulțime cu un număr fixat (exact) de elemente.

În genere funcțiile hash nu sunt inversabile. În informatică, funcțiile hash sunt utilizate pentru a accelera căutările în diverse baze de date. Valoarea unei funcții hash este denumită ***rezumat***, ***valoare hash***, ***cod hash***, ***sumă hash*** sau doar ***hash***. În criptografie funcțiile hash sunt utilizate pe larg în algoritmii de semnătură digitală.

Ideea utilizării funcțiilor hash a fost concepută în anii 1950. Însă proiectarea optimă a funcțiilor hash rămâne a fi un subiect actual de cercetare. O funcție hash poate face conexiune intre două sau mai multe chei de aceeași valoare hash. Minimalizarea șansei apariției unor astfel de coliziuni este sarcina principală ale aplicațiilor care utilizează funcția hash. Această denotă că funcția hash trebuie să lege cheile de valorile hash cât mai convingător posibil [4-9].

Să urmărim mai jos exemple de valori ale funcției hash.

Tabel 1. Exemple de valori a funcții Hash



Sursă. https://koaha.org/wiki/Funzione_crittografica_di_hash#

Din Tabelul 1 se observă că *modificările chiar mici ale datelor de intrare determină o modificare vizibilă a ieșirii: acesta este așa-numitul efect de avalanșă.*

Exista multe funcții care pot transforma intrarea de lungime arbitrara in o ieșire de lungime fixă, însă funcțiile care prezintă interes din punct de vedere criptografic sunt funcțiile hash de sens unic $h = H(m)$.

În informatică, o **funcție hash criptografică**, este o clasă specială de funcții hash care are anumite proprietăți ce o fac accesibilă pentru utilizare în criptografie.

O **funcție hash criptografică** este un algoritm matematic care transformă date de lungime arbitrară (*mesaj*) într-un șir binar de mărime fixă numită *valoare hash* (sumă hash). Uneori este folosit și termenul englezesc *mesaj digest* (sau pur și simplu *digest*).

Funcția hash este concepută pentru a fi unidirecționată ceea ce înseamnă că este o funcție dificil de inversat.

Fie ecuația generală care descrie funcțiile hash este $h = H(m)$. Parafrazând cele menționate mai sus evidențiem caracteristicile speciale ale funcțiilor de sens unic:

- Pentru orice intrare m este ușor de calculat h.
- Având h este dificil de calculat m astfel încât se fie satisfăcută relația $h = H(m)$.
- Pentru un m dat este dificil de găsit m_1 astfel încât $H(m) = H(m_1)$.

Caracteristicile respective permit ca funcțiile hash criptografice să fie utilizate pe scară largă în domeniile de securitate IT, cum ar fi semnăturile digitale, codurile digitale, codurile de autentificare a mesajelor și alte forme de autentificare. În contexte de securitate cibernetică, valorile hash criptografice sunt uneori numite „amprente digitale” sau „*sumă de control*”, deși toți acești termeni au funcții mai generale cu proprietăți și scopuri destul de diferite.

Nu este simplu de găsit o funcție care satisface toate cerințele punctate mai sus. Dar totuși există destul de multe funcții Hash folosite in criptografie cu diferite niveluri de siguranță. În acest sens se poate evidenția:

- ☐ **Algoritmul MD5**

Algoritmul MD5 (MD provine din *Message Digest*) este o funcție hash de sens unic, proiectat de Ron Rivest și face parte din seria MD de funcții hash: MD2, MD4, MD5, MD6. Algoritmul produce un hash, sau altfel zis imagine, de 128 biți a mesajului de intrare.

- ☐ **Algoritmii SHA de funcții hash**

Algoritmul SHA sau Secure Hash Algorithm este o familie de funcții hash criptografice publicate de Institutul Național de Standarde și Tehnologie (NIST) din SUA ca standarde federale de procesare a informației (FIPS).

În acest sens, funcțiile hash criptografice sunt folosite ca identificatoare al fișierelor, pentru verificarea parolelor, a integrității fișierelor sau a mesajelor și pentru realizarea protocoalelor proof-of-work etc. Astfel, majoritatea algoritmilor de semnătură digitală doar confirmă autenticitatea hash-ului mesajului care urmează să fie „semnat”, verificarea autenticității valorii hash fiind și dovada autenticității mesajului.

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

5. Algoritmul de generare a semnăturii digitale RSA

Algoritmul de generare a semnăturii digitale RSA este același ca și algoritmul de criptare RSA, examinat mai sus, cu unele particularități specifice.

Schema semnăturii digitale pentru interlocutorul *A* constă din următoarele etape:

1. *Generarea cheilor*. Etapa respectivă nu se deosebește de etapa similară a algoritmului de criptare RSA. În calitate de rezultat se obține un cuplu de chei a entității *A*: cheia publică este cuplul (e, n) și cheia privată este perechea (d, n).
2. *Generarea semnăturii*. Interlocutorul *A* execută următoarele:
   - ☐ calculează $S = [H(m)]d$ mod n, unde H este o funcție hash și astfel generează semnătura S a mesajului m.
3. *Verificarea semnăturii*. Pentru a verifica semnătura S a mesajului m, interlocutorul *B* execută următoarele:
   - ☐ *Interlocutorul B* primește de la Interlocutorul A , semnătura S și valoarea h=$H(m)$, după care:
     - calculează $H1=Se$ mod n și $H2 = H(m)$ mod n, utilizând aceeași funcție hash; în cazul în care $H1 = H2$ semnătura e verificată. În caz contrar înseamnă că s-a produs ceva neprevăzut intre A și interlocutorul B ori interlocutorul *A* vrea să-l înșele pe *B*.

Problema 2. Interlocutorul A, cunoscând funcția h = H(m) = 5, vrea să aplice o semnătură digitală pe un document destinat interlocutorului B în scopul confirmării autenticității unei tranzacții. Descrieți care sunt pașii interlocutorilor A și B.

1. *Interlocutorul A generează cheile*.
   - ☐ Interlocutorul A identifică aliator două numere secrete $p = 13$ și $q = 11$;
   - ☐ Interlocutorul A calculează $n = 13 \square 11 = 143$ și $\varphi(n)=(p-1)\square(q-1)= 12\square 10=120$;
   - ☐ Interlocutorul A alege o cheie secreta **e** astfel, încât *cmmdc*(e, $\varphi(n)$) = 1. Fie cheia secretă aleasă este e = 7, deoarece *cmmdc*(7, 120) = 1;
   - ☐ Interlocutorul A calculează cheia publică $d = e^{-1} mod\ \boldsymbol{\varphi}\ (n)$ (adică $de = 1\ mod\ \boldsymbol{\varphi}\ (n)$).

     Astfel, avem $d = e^{-1} mod\ \boldsymbol{\varphi}\ (n) = 7^{-1}$ mod 120 = 103, ($7\square d = 1$ mod 120);

     Ca rezultat interlocutorul A obține cheia publică (e, n) = (7,143) și cheia privată perechea (d, n) = (103, 143).
2. *Interlocutorul A generează semnătura*.
   - ☐ Deoarece interlocutorul A cunoaște $H(m)$=5, poate deja semna documentul:

     $$S = [H(m)]^d \text{ mod n} = (5\ 103) \text{ mod } 143 = 125;$$
   - ☐ semnătura electronică obținută de A este $S = 125$;
   - ☐ *Interlocutorul A* transmite către B semnătura S obținut la pasul anterior și m (textul clar – fără secretizare).

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

3. *Interlocutorul B verifică semnătura*.

   Interlocutorul B primește de la Interlocutorul A , semnătura *S* și valoarea h, după care calculează *H*(*m*) în două moduri și le compară.

   - ☐ *Interlocutorul B* calculează *H*(*m*) utilizând cheia publică a lui *A*:

   $$H1 = S^e \bmod n = (1257) \bmod 143 = 5;$$

   - ☐ *Interlocutorul B* calculează *H*(*m*) prin aplicarea aceleași funcții hash ca și interlocutorul *A* și obține:

   $$H2 = H(m) \bmod n = 5 \bmod 143 = 5;$$

   - ☐ Deoarece *H*1 = *H*2, *interlocutorul B* a clarificat că semnătura transmisă de A este validă și tranzacția poate fi lansată.

6. Sinteze și concluzii

Algoritmul criptografic RSA, inclusiv semnătura digitală, cu cheie publică și privată implică transformarea textului simplu în text cifrat și apoi transformarea textului respectiv în text inițial clar. În schimb, o funcție hash este un algoritm de criptare unidirecțional: odată ce este criptat textul, este aproape imposibil de recuperat din textul cifrat rezultat (denumit hash).

Din acest punct de vedere pentru orice funcție hash dată, nu există două texte simple care să producă același hash. Din punct de vedere matematic, acest lucru nu este chiar corect, dar pentru orice funcție hash efectiv utilizată, probabilitatea că acest lucru să se întâmple este în general foarte mică. Din aceste considerente situația respectivă poate fi ignorată.

Din această perspectivă algoritmii de hash reprezintă un instrument eficient pentru asigurarea integrității datelor, inclusiv a semnăturii digitale. Astfel, după cum s-a menționat mai sus, un mesaj poate fi trimis împreună cu propriul hash. La primirea mesajului, se poate rula același algoritm de hash pe textul mesajului; dacă hashul care este produs este diferit de cel care însoțește mesajul, trezește suspiciuni vis-a-vis de mesajul primit care posibil să fi fost modificat în tranzit. Hashing-ul este, de asemenea, utilizat pentru a asigura confidențialitatea parolelor.

În așa mod, cunoașterea conceptelor și noțiunilor de bază din teoria numerelor facilitează înțelegerea și aplicarea algoritmilor RSA în diverse domenii. În acest context, studierea cunoștințelor de bază din algebra abstractă și teoria numerelor contribuie semnificativ la înțelegerea de către studenți din domeniul IT al algoritmilor criptografici cu cheie publică și privată. Într-un text mai larg securitatea informațiilor a oricărui sistem este asigurată de o gamă largă de măsuri: matematice, informatice, juridice, morale, etice, tehnice și software.

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. ZGUREANU, A. Criptarea și securitatea informației. Chișinău: Academia de transporturi, informatică și comunicații, 2013. 148 p.
2. GROZA, B. *Introducere în Criptografie. Funcții Criptografice. Fundamente Matematice și Computaționale*. Timișoara: Editura Politehnica, 2012. 200 p.
3. СПИРИДОНОВА, И. А. *Основы криптографии: методические указания к практическим занятиям, лабораторным работам и самостоятельной работе студента*. Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2016. 28 с.
4. ФЕРГЮСОН, Н.; ШНАЙЕР, Б. *Практическая криптография*. М.: Издательсикй дом «Вильямс», 2004. 432 с.
5. ШНАЙЕР, Б. *Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си*. М.: Триумф, 2003.816 с.
6. SCHNEIER, B. *Applied Cryptography*. New-York: Wiley, 1995. 662 p.
7. RIVEST, R. *The MD5 Message-Digest Algorithm*. MIT Laboratory for Computer Science and RSA Data Security, 1992. RFC 1321. [rfc.com.ru/rfc1321.htm]
8. ГОРБЕНКО, И. Д.; ШТАНЬКО, И. А. Функции хеширования. Понятия, требования, классификация, свойства и применение В: *Радиоэлектроника и информатика*, 1998. №1, с. 64-69.
9. РОМАНЬКОВ, В. А. *Введение в криптографию*. М.: ФОРУМ, 2012. 240 с.

© Chiriac Liubomir, Danilov Aurel, 2022

CZU: 517.912

METODE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR TRANSCENDENTE

Andrei CORLAT
Ion JARDAN
Universitatea Tehnică a Moldovei
Institutul de Matematică și Informatică „Vladimir Andrunachievici”
e-mail: andrei.corlat@isa.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md

Rezumat. În materialul de față sunt prezentate diferite metode de rezolvare a ecuațiilor transcendente: metoda standard sau elementară și metoda substituției.
Cuvinte cheie: ecuație transcendentă, metodă de rezolvare, metoda elementară, metoda substituției.

Abstract. Different methods of solving transcendental equations are presented in the present material: the standard or elementary method and the substitution method.
Keywords: transcendental equation, solution method, elementary method, substitution method.

Amintim, ecuațiile transcendente se numesc ecuațiile de forma $f(x) = 0$, unde $f(x)$ este o funcție transcendentă elementară (de exemplu exponențială, logaritmică, trigonometrică). De regulă, în caz general, ecuațiile transcendente nu pot fi rezolvate cu ajutorul unor metode elementare (standarde). Vom prezenta metode speciale pentru rezolvarea unor tipuri de ecuații transcendente [1-3].

Exemplul 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + 1 = cos\, x$; b) $ln(cos\, x) = x^4$; c) $2^{|x|(x-\pi)^2} = |cos\, x|$;

d) $2\, cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2^x + 2^{-x}$; e) $arccos(2\, log_3(tg\, x)) = 0$; f) $log_{\sqrt{2}\, sin\, x}(1 + cos\, x) = 2$.

Soluții.

a) Se observă că domeniul de valori al funcției f ce reprezintă membrul din stânga ecuației este $E(f) = 1; +\infty)$, iar domeniul de valori al funcției g ce reprezintă membrul din dreapta ecuației este $E(g) = [-1; 1]$. Astfel ecuația data este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ cos\, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

b) DVA al ecuației este mulțimea $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. În DVA $0 < cos\, x \leq 1$, prin urmare $ln(cos\, x) \in -\infty; 0$, în același timp $x^4 \geq 0$.

Astfel ecuația data este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^4 = 0 \\ ln(cos\, x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ cos\, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

© Corlat Andrei, Jardan Ion, 2022

c) Se observă că $|x|(x-\pi)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, și prin urmare $2^{|x|(x-\pi)^2} \geq 1$. În același timp, membrul din dreapta ecuației, $|cos\, x|$ primește valori de la 0 la 1, $0 \leq |cos\, x| \leq 1$ și, prin urmare, se obține sistemul

$$\begin{cases} 2^{|x|(x-\pi)^2} = 1 \\ |cos\, x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|(x-\pi)^2 = 0 \\ cos\, x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \end{array}\right. \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \end{array}\right..$$

$$S = \{0; \pi\}.$$

d) Se observă că domeniul de valori al funcției f ce reprezintă membrul din stânga al ecuației este $E(f) = [-2; 2]$, iar domeniul de valori al funcției g ce reprezintă membrul din dreapta ecuației este $E(g) = 2; +\infty)$ (amintim inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$ și $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Astfel se obține sistemul

$$\begin{cases} 2\, cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2 \\ 2^x + 2^{-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

e) Avem $arccos(2\, log_3(tg\, x)) = 0 \Leftrightarrow 2\, log_3(tg\, x) = 1 \Leftrightarrow log_3(tg\, x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$tg\, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + \pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

f) *DVA* al ecuației reprezintă

$$\begin{cases} sin\, x > 0 \\ \sqrt{2}\, sin\, x \neq 1 \\ 1 + cos\, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ sin\, x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ cos\, x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ sin\, x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ cos\, x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

În *DVA* ecuația dată este echivalentă cu

$$1 + cos\, x = \left(\sqrt{2}\, sin\, x\right)^2 \Leftrightarrow 1 + cos\, x = 2\, sin^2 x \Leftrightarrow 1 + cos\, x = 2(1 - cos^2 x) \Leftrightarrow$$
$$(1 + cos\, x) - 2(1 - cos\, x)(1 + cos\, x) = 0 \Leftrightarrow (1 + cos\, x)\big(1 - 2(1 - cos\, x)\big) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(1 + cos\, x)(2\, cos\, x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos\, x = -1 \\ cos\, x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin \emptyset (\text{în} DVA) \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} +$$

$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ (mulțimea soluțiilor $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ nu verifică *DVA*).

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Deseori metoda substituției reprezintă o metodă efectivă de rezolvare a ecuațiilor transcendente.

© Corlat Andrei, Jardan Ion, 2022

Exemplul 2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $arcsin(2^{x+1}) + arcsin\left(2\sqrt{3}\cdot 2^x\right) = \frac{\pi}{2}$;

b) $2\,sin^2(2\pi\cdot 2^x) - 4\,sin(2\pi\cdot 2^x) + sin(4\pi\cdot 2^x) + 4\,sin^2(\pi\cdot 2^x) = 0$;

c) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{sin\,x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{sin\,x} = 3\frac{1}{3}$.

Soluții.

a) Fie $2^{x+1} = u, 2\sqrt{3}\cdot 2^x = v$. Atunci ecuația devine

$$arcsin\,u + arcsin\,v = \frac{\pi}{2}.$$

Deoarece $arcsin\,v + arccos\,v = \frac{\pi}{2}$, se obține

$$arcsin\,u + \frac{\pi}{2} - arccos\,v = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow arcsin\,u = arccos\,v.$$

Deci $sin(arcsin\,u) = sin(arccos\,v)$ și, deoarece $sin(arccos\,\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$, avem $u = \sqrt{1-v^2}$, de unde $1 - v^2 = u^2$.

Revenind la necunoscuta inițială, se obține

$$1 - 12\cdot 2^{2x} = 4\cdot 2^{2x} \Leftrightarrow 16\cdot 2^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2^{2x+4} = 2^0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$S = \{-2\}.$$

b) Notăm $y = \pi\cdot 2^x, y > 0$. Atunci ecuația dată devine

$$2\,sin^2\,2\,y - 4\,sin\,2\,y + sin\,4\,y + 4\,sin^2\,y = 0.$$

Grupând convenabil, se obține

$$2\,sin^2\,2\,y - 2\,sin\,2\,y - 2\,sin\,2\,y + 2\,sin\,2\,y\,cos\,2\,y + 2 - 2\,cos\,2\,y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,sin\,2\,y(sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y) - 2(sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y)(sin\,2\,y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y = 0 \\ sin\,2\,y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}sin\,2\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}cos\,2\,y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\,2\,y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} cos\,2\,y\cdot cos\frac{\pi}{4} + sin\,2\,y\cdot sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2y - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 2y = 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y = \pi k, k\in\mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\in\mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y = \pi k, k\in\mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Deoarece $y > 0$, avem

$$\left[\begin{array}{c} y = \pi k, k\in\mathbb{N}^* \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{N} \end{array}\right..$$

Prin urmare,

© Corlat Andrei, Jardan Ion, 2022

$$\left[\begin{array}{l}\pi\cdot 2^x=\pi k, k\in\mathbb{N}^*\\ \pi\cdot 2^x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{N}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=k, k\in\mathbb{N}^*\\ 2^x=\frac{1}{4}+n, n\in\mathbb{N}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=log_2 k\,, k\in\mathbb{N}^*\\ x=log_2\left(\frac{1}{4}+n\right), n\in\mathbb{N}\end{array}\right..$$

$$S=\left\{log_2 k\,; log_2\left(\frac{1}{4}+n\right)|k\in\mathbb{N}^*, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

c) Se observă că avem $\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)=25-24=1$, de unde rezultă că $5-2\sqrt{6}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-1}$ și, prin urmare ecuația dată devine $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{sin\,x}+\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{-sin\,x}=\frac{10}{3}$.

Notăm $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{sin\,x}=t, t>0$ și obținem ecuația $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$ sau $3t^2-10t+3=0$. De unde $t=3$ sau $t=\frac{1}{3}$.

Se observă că $5+2\sqrt{6}=3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$, de unde urmează $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și, prin urmare avem

$$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{sin\,x}=3\\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{sin\,x}=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}sin\,x=log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\\ sin\,x=log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}sin\,x=log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\\ sin\,x=-log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\end{array}\right..$$

Deoarece $\sqrt{3}+\sqrt{2}>3$, rezultă că $log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\in(0;1)$ și, prin urmare obținem

$$\left[\begin{array}{l}x=arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\right)+\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=\pi-arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\right)+\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=-arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pi n\pm arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\right), n\in\mathbb{Z}.$$

$$S=\left\{\pi n\pm arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3\right)|n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Bibliografie

1. COHAL, T.; IUREC, Gh.; POPA, G. *Probleme de matematică pentru elevii clasa X-a*. Ed. a 3-a. Pitești, 2010.
2. ТКАЧУК, В. В. *Математика абитуриента*. Москва: МЦНМО, 2008.
3. www.math.md/school.

© Corlat Andrei, Jardan Ion, 2022

CZU: 004.92

SOFTWARE POPULAR PENTRU MODELAREA 3D

Maria CRISTEI
Departamentul de Informatică, Universitatea de Stat din Moldova
cristeimusm@yahoo.com

Rezumat. În articolul de faţă sunt tratate aspecte ce țin de proiectarea tridimensională, precum și crearea, modelarea și animarea obiectelor 3D. Lucrarea conține și o descrie succintă a celor mai populare aplicații utilizate pentru modelarea 3D.
Cuvinte cheie: grafica, modelare 3D, animații, scene virtuale.

Abstract. This article deals with aspects related to three-dimensional design, as well as the creation, modeling and animation of 3D objects. The article contains and brief description of the most popular applications used for 3D modeling.
Keywords: Graphics, 3D modeling, animations, virtual scenes.

Introducere

Realitatea virtuală, definită ca o simulare a realității prin crearea de ambiențe artificiale cu ajutorul computerului [1], presupune utilizarea de astfel de componente obligatorii ale unei serii vizuale moderne, precum *Grafica tridimensională (3D)* și *animația*. Cu siguranță, orice proiect de *realitate virtuală*, fie *vizualizare arhitecturală*, *joc pe calculator* sau *producție cinematografică*, conține grafică pe calculator și desigur, animație. Animația și grafica 3D, implementate în varii domenii de activitate, reprezintă de fapt, baza spațiului media modern, producerea căreia pare imposibilă fără utilizarea graficii pe calculator și a animației [2].

Modelarea 3D este o zonă foarte populară, în curs de dezvoltare și multi-tasking în industria calculatoarelor de astăzi. Crearea de modele virtuale de ceva a devenit o parte integrantă a producției moderne. Desigur, sunt prevăzute programe specifice pentru diferite sarcini din această industrie.

3D-modelarea personajelor/caracterelor este procesul de creare a unui model virtual tridimensional al personajului folosind un software special. Scopul acestei modelări 3D este de a dezvolta o imagine volumetrică vizuală a obiectului dorit.

3D - animarea este procesul ce ne permite să „reînviem” *3D modele de personaje* și să le populăm cu lumi virtuale.

3D modele au o serie de avantaje față de grafica 2D, în special atunci când creăm jocuri, filme sau desene animate. Cele mai semnificative avantaje ale modelelor 3D sunt:

- *realism*: folosind 3D- modelele pot fi realizate la orice nivel de detaliu - de la simpla schițare la precizia fotografică;
- *libertatea de animație*: personajul este ușor de controlat - el va efectua orice acțiuni și pentru aceasta nu trebuie să fie redescris în diferite poziții;

© Cristei Maria, 2022

- *simplitatea muncii*: programele ne permit să schimbăm modelul cu câteva mișcări de mouse;
- *vizualizare:* modelul volumetric pe calculator arată mult mai colorat decât imaginea 2D.

Analiza celor mai populare aplicații pentru modelarea 3D

Identificarea unei aplicații potrivite dintr-o varietate de opțiuni generează dificultăți de alegere, din cauza dezvoltărilor tehnologice intense și dinamice în domeniul graficii din realitatea virtuală. Acest fapt se manifestă prin apariția continuă de echipamente din ce în ce mai performante, de numeroase limbaje și programe utilitare (toolkits) pentru proiectarea tridimensională, sisteme, biblioteci, precum și crearea, modelarea și animarea obiectelor 3D, care propun diferite modalități de abordare ale aplicațiilor grafice.

Crearea modelului scenei virtuale și *vizualizarea scenei virtuale* reprezintă cele două aspecte importante pentru generarea imaginii vizuale în realitatea virtuală. Primul aspect este un proces off-line și, de cele mai multe ori, de durată considerabilă, prin care se creează colecția de modele ale obiectelor 3D, care constituie cea mai adecvată reprezentare a mediului virtual. Iar cel de-al doilea aspect este un proces on-line, care se desfășoară în timp real, cu participarea uneia sau mai multor persoane, în care scena virtuală este explorată în mod interactiv și, în fiecare moment, imaginea scenei redată pe display depinde de condițiile de explorare (poziție de observare, acțiuni interactive etc.).

În acest sens, autorul a realizat o analiză a celor mai populare și avansate aplicații pentru lucrul cu spațiul volumetric, ce îndeplinesc cerințele moderne ale profesioniștilor din domeniul divertismentului, designului și ingineriei, celor cărora le place sa creeze/să modifice conținut 3D personalizat. Analiza dată, se referă, de asemenea, și la problema complexității studierii programului și a timpului necesar pentru adaptarea acestuia, deoarece lucrul cu modelarea 3D ar trebui să fie rațional, rapid și convenabil, iar rezultatul să fie de înaltă calitate și cel mai creativ. Analiza realizată a inclus mai multe programe pentru modelarea 3D, însă în continuare vom descrie cele mai de top software profesionale:

✓ **Programe de la Autodesk.** Autodesk oferă o selecție largă de programe de creare de **modele** și **animații 3D,** care au caracteristici similare (3Ds Max [3], Maya [4]). Cert este că Autodesk este un complex imens care lucrează în direcții diferite. Cu toate acestea, 3Ds Max este cea mai puternică aplicație funcțională și universală pentru grafică tridimensională. 3Ds Max este un standard pentru care sunt lansate mai multe plug-in-uri suplimentare și dezvoltate modele 3D gata făcute. 3Ds Max este un program specializat ce oferă artiștilor un set intuitiv de instrumente pentru crearea și modificarea înaltă a 3D caractere. Crearea personajelor în 3D Max și alte programe din Autodesk necesită abilități profesionale și o înțelegere profundă a principiilor programului de la modelator.

© Cristei Maria, 2022

Acest sistem poate fi utilizat în toate industriile, de la arhitectură și design interior la crearea de desene animate și videoclipuri animate. Autodesk 3Ds Max este ideal pentru grafică statică. Cu ajutorul acesteia rapid sunt create imagini realiste din interior, exterioare, obiecte individuale. Prin utilizarea diferitelor funcții și capacitatea de a gestiona obiectele în conformitate cu legile fizicii, proiectele terminate arată fotorealiste. De asemenea, utilizatorul va putea suplimenta produsul cu diverse plugin-uri (texturi, efecte).

Acest software deține o poziție de lider printre arhitecți și designeri, dar are și aspecte negative:

- *Preț mare*. Nu toți utilizatorii începători își pot permite un sistem cu preț atât de mare pentru o versiune licențiată. Însă un bonus este șansa de a utiliza gratuit un produs plătit pe baza versiunii studenților.
- *Dificultăți în stăpânire*. 3Ds Max nu este ușor și necesită numeroase actualizări pentru a funcționa eficient.
- *Cerințe hardware*. Dacă sunteți obișnuiți să lucrați la un computer sau laptop vechi, atunci 3Ds Max nu poate afișa întreaga funcționalitate a instrumentelor.

✓ **Cinema 4D** este un program pentru **modelarea** și **editarea** obiectelor 3D, și, în același timp, acceptă animație și redare de înaltă calitate, care îl poziționează ca un concurent al Autodesk 3Ds Max. Cinema 4D are aproape același set de funcții, dar diferă în logica muncii și în metodele de efectuare a operațiilor. Acest lucru poate crea inconveniente pentru cei care sunt deja obișnuiți să lucreze în 3Ds Max și vor să profite de Cinema 4D. Fiecare funcție și instrument are o fereastră de informații în care există o descriere detaliată.

Comparativ cu rivalul său legendar, Cinema 4D [5] are o funcționalitate mai avansată în crearea animațiilor video, precum și capacitatea de a crea grafică realistă în timp real. Cinema 4D este, în primul rând, inferior în popularitatea sa, motiv pentru care numărul de modele 3D pentru acest program este mult mai mic decât pentru Autodesk 3Ds Max. În plus, utilizatorul însuși poate alege o versiune a programului cu un set specific de funcții. Dar nu este gratuit și va trebui să plătim pentru fiecare adăugare.

✓ **Blender 3D** este unul dintre puținele editoare gratuite pentru **crearea 3D modele**. Programul are un număr mare de perii, capacitatea de a crea straturi, ușurința de a lucra cu animație și multe alte trucuri inerente Blender 3D [6]. Programul are și un mod de **modelare**, ne permite să creăm **animație scheletică,** are funcția de a crea jocuri.

Una dintre principalele caracteristici ale Blender 3D este o interfață avansată care ne permite să ajustăm toate elementele și instrumentele la preferințele noastre. Acest lucru oferă o mare prioritate atunci când optăm pentru un program de modelare 3D.

În ceea ce privește caracteristicile tehnice ale computerului pentru a lucra cu Blender 3D, trebuie să ținem cont că va fi necesar de cel puțin 2 GB memorie cu acces

© Cristei Maria, 2022

aleator, o placă video cu 1 GB memorie video (compatibilă cu Open GL) și de preferat un procesor dual-core pe 32 de biți.

✓ **Zbrush** [7] echipează modelatorul cu o perie, care atrage lovituri cu adâncime. Concomitent cu **modelarea**, putem **decora obiectul**. Un avantaj important al programului este adăugarea automată a umbrelor și a evidențierilor ce arată natural, fără intervenția unui modelator. Procesul de redare se întâmplă de obicei în timp real, iar artistul vede imediat rezultatul lucrării.

✓ **Sculptris** [8] nu poate fi numit o aplicație obișnuită pentru **modelare**. Principiul de funcționare este complet diferit pentru construirea obiectelor 3D, așa cum similar utilizatorul ar sculpta o figură dintr-o bucată virtuală de lut. Pentru cei care fac primii pași în domeniul unui sculptor virtual, aplicația Sculptris simplă și distractivă este ideală. Cu această aplicație, utilizatorul este imersat imediat în procesul fascinant de sculptură a unei sculpturi sau a unui personaj. Capacitățile Sculptis sunt suficiente, dar nu sunt complete. Rezultatul lucrării este crearea unui model unic care va fi utilizat atunci când lucrăm în alte sisteme.

✓ **iClone** [9] este un program cu un set de caracteristici bune pentru **crearea de animații** în 3D. Este imposibil să creăm obiecte super-realiste, deoarece aplicația a fost inițial proiectată pentru o muncă rapidă. iClone este un program conceput special pentru **crearea de animații rapide** și **realiste**. Datorită bibliotecii mari și de înaltă calitate a primitivilor, utilizatorul se poate familiariza cu procesul de creare a animațiilor și își poate dobândi primele abilități în acest tip de creativitate. Scenele din iClone sunt ușor și distractiv de creat. Este potrivit pentru studiul inițial al filmului în etapele schițării.

iClone este potrivit pentru a studia și utiliza în animații simple sau cu buget redus. Cu toate acestea, funcționalitatea sa nu este la fel de largă ca în Cinema 4D.

Rezultatul detaliat al analizei realizate este prezentat în tabelul următor:

Tabelul 1. Produse software pentru modelarea 3D

Modelare interioară contur	Visicon, Sweet Home 3D, Sketch Up
Vizualizare interioară și exterioară	Autodesk 3Ds Max, Cinema 4D, Blender
Proiectare 3D subiect	Autodesk 3Ds Max, Blender, AutoCAD, NanoCAD, Cinema 4D
Sculpting	Sculptris, Blender, Cinema 4D, Autodesk 3Ds Max
Creare de animație	Autodesk 3Ds Max, Blender, Cinema 4D, iClone
Modelarea 3D a pieselor	Autodesk 3Ds Max, Cinema 4D, Sculptris, iClone, Sketch Up, ZW3D
Modelare de divertisment	Lego Digital Designer, Sculptris, Paint3D

© Cristei Maria, 2022

Concluzii

Pentru alegerea unui mediu pentru modelare 3D, în primul rând, este necesar să cunoaștem gama de sarcini pentru care este potrivit. Mai mult decât atât, vom alege cea mai potrivită aplicație pentru proiectarea tridimensională, crearea, modelarea și animarea obiectelor 3D, doar atunci când sunt decise obiectivele principale ale proiectului dvs. cu planuri de volum.

De asemenea este de remarcat că, piața este continuu completată cu funcționalități și interfețe similare, aplicații care în multe privințe nu sunt inferioare produselor bine cunoscute ale dezvoltatorilor din întreaga lume. De aceea vă sugerez să comparați mai multe produse de program pentru modelarea și crearea de modele volumetrice în grafică 3D, înainte de a începe propriile proiecte.

Bibliografie

1. https://ro.wikipedia.org/wiki/Realitate_virtual%C4%83
2. CRISTEI, M. Produse software pentru modelarea 3D. În: *Mathematics and IT: Research and Education*. 1-3 iulie 2021. Chișinău, Republica Moldova: 2021. p.122-123. disponibil online: https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/122-123_23.pdf
3. https://www.autodesk.com/products/3ds-max/features
4. https://knowledge.autodesk.com/support/maya
5. https://www.maxon.net/en/cinema-4d
6. https://www.blender.org/features/
7. https://pixologic.com/features/
8. https://sculptris.en.softonic.com/?ex=CORE-1224.2
9. https://www.reallusion.com/

© Cristei Maria, 2022

CZU: 519.673:514+511.14

REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE CU AJUTORUL NUMERELOR COMPLEXE

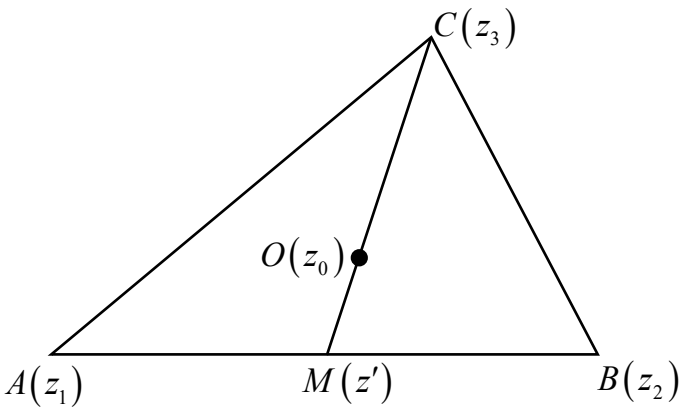
Leonid DOHOTARU
Ion JARDAN
Universitatea Tehnică a Moldovei
e-mail: leonid.dohotaru@mate.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md

Rezumat. În această lucrare se arată că unele probleme din geometrie pot fi ușor rezolvate cu ajutorul numerelor complexe, respectiv cu ajutorul vectorilor plani ce le corespund.
Cuvinte cheie: geometrie, probleme de geometrie, numere complexe, vector plan.

Abstract. In this paper it is shown that some problems in geometry can be easily solved with the help of complex numbers, respectively with the help of their corresponding plane vectors.
Key words: geometry, geometry problems, complex numbers, plane vector.

Vom considera câteva probleme pentru a arăta aplicabilitatea numerelor complexe în geometrie.

Problema 1. Să se afle coordonata complexă a punctului de intersecție a medianelor în $\triangle ABC$, dacă coordonatele complexe ale vârfurilor $\triangle ABC$ sunt respectiv z_1, z_2 și z_3.



Soluție. Fie O este punctul de intersecție a medianelor $\triangle ABC$, iar M este mijlocul segmentului AB și z'– coordonata complexă a punctului M. Atunci $z' = \frac{z_1+z_2}{2}$. Vectorul $\overrightarrow{MC}$ are coordonata complexă $z_3 - z' = z_3 - \frac{z_1+z_2}{2}$. Deoarece $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, rezultă că coordonata complexă a vectorului $\overrightarrow{MO}$ este $\frac{1}{3}\left(z_3 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) = z_0 - z'$, de aici

$$z_0 = z' + \frac{1}{3}(z_3 - z') = \frac{2}{3}z' + \frac{1}{3}z_3 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3},$$

adică se obține coordonata complexă a centrului de greutate a $\triangle ABC$.

■

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

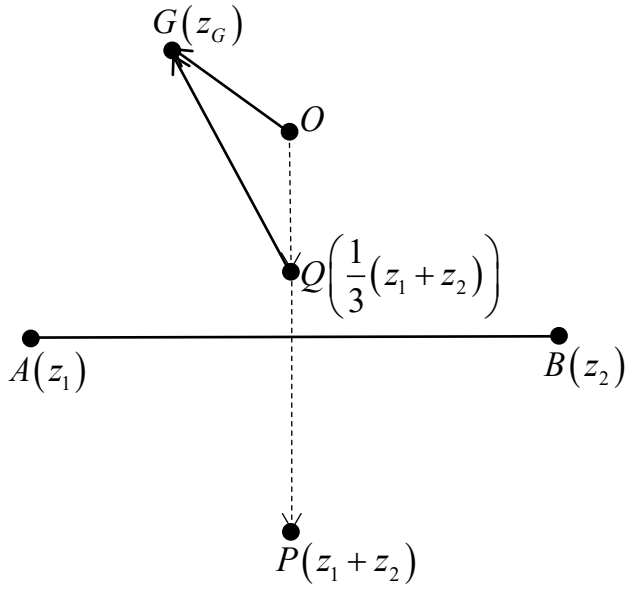
Problema 2. Să se demonstreze că atunci când unul dintre vârfurile triunghiului ABC descrie cercul circumscris triunghiului, locul geometric al centrului de greutate al triunghiului este un cerc.

Soluție. Alegem originea axelor de coordonate O astfel, ca ea să coincidă cu centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, vârfurile A și B fiind fixate, iar vârful C variabil. Dacă notăm coordonatele complexe ale vârfurilor $\triangle ABC$ cu z_1, z_2 și respectiv z_3, atunci conform formulei obținute în problema precedentă, avem

$$z_G = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad (1),$$

unde G este centru de greutate al $\triangle ABC$.

Din (1) rezultă că $z_G - \frac{1}{3}(z_1 + z_2) = \frac{1}{3}z_3$.



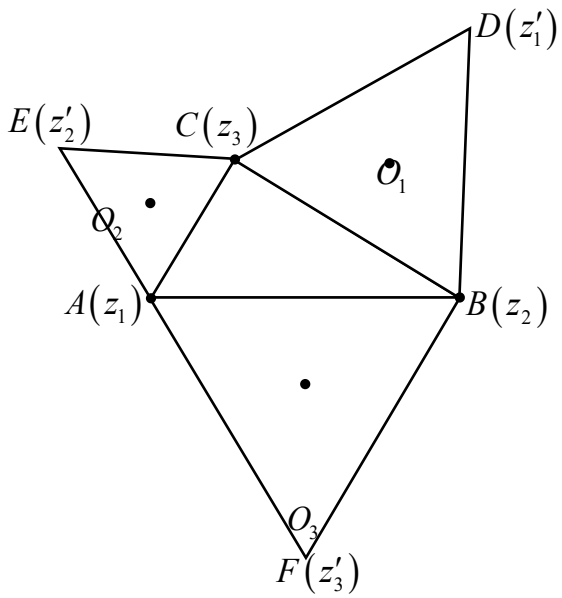
Deoarece A și B sunt fixe, suma $z_1 + z_2$ reprezintă vectorul constant $\overrightarrow{OP}$, iar $\frac{1}{3}(z_1 + z_2)$ reprezintă vectorul fix $\overrightarrow{OQ}$, aici $OQ = \frac{1}{3}OP$. Diferența $z_G - \frac{1}{3}(z_1 + z_2)$ reprezintă diferența $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OQ}$, adică vectorul $\overrightarrow{QG}$, care are originea în punctul fix Q. Modulul acestui vector este $\frac{1}{3}|z_3| = \frac{1}{3}R$ (R fiind raza cercului circumscris $\triangle ABC$), urmează că extremitatea G a vectorului $\overrightarrow{QG}$ descrie un cerc cu centrul în Q și raza $\frac{1}{3}R$.

■

Problema 3. Să se demonstreze că dacă pe laturile $\triangle ABC$ (în exterior) sunt construite triunghiuri echilaterale, atunci centrele lor de asemenea formează un triunghiului echilateral.

Soluție. Fie $z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3', u_1, u_2, u_3$ reprezintă coordonatele complexe a punctelor $A, B, C, D, E, F, O_1, O_2, O_3$ respectiv.

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022



Notăm $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Atunci avem

$$z_1' = z_3 + a(z_2 - z_3);\ z_2' = z_1 + a(z_3 - z_1);\ z_3' = z_2 + a(z_1 - z_2).$$

Aplicând rezultatele problemei 1, aflăm coordonatele complexe ale punctelor O_1, O_2 și O_3.

$$u_1 = \frac{1}{3}(z_1' + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}\big(z_2 + 2z_3 + a(z_2 - z_3)\big),$$
$$u_2 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2' + z_3) = \frac{1}{3}\big(2z_1 + z_3 + a(z_3 - z_1)\big),$$
$$u_3 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3') = \frac{1}{3}\big(z_1 + 2z_2 + a(z_1 - z_2)\big).$$

Considerăm diferențele

$$u_1 - u_3 = \frac{1}{3}\big(2z_3 - z_1 - z_2 + a(2z_2 - z_3 - z_1)\big),$$
$$u_2 - u_3 = \frac{1}{3}\big(z_3 + z_1 - 2z_2 + a(z_2 + z_3 - 2z_1)\big).$$

Numărul $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ verifică ecuația $a^3 + 1 = 0$ sau $(a+1)(a^2 - a + 1) = 0$. Deoarece $a \neq -1$, rezultă că $a^2 - a + 1 = 0$ sau $a^2 = a - 1$.

Luând în considerație această relație calculăm $a(u_1 - u_3)$:

$$a(u_1 - u_3) = \frac{1}{3}\big(a(2z_3 - z_1 - z_2) + a^2(2z_2 - z_3 - z_1)\big) =$$
$$= \frac{1}{3}\big(a(2z_3 - z_1 - z_2) + (a-1)(2z_2 - z_3 - z_1)\big) =$$
$$= \frac{1}{3}\big(z_1 + z_3 - 2z_2 + a(-2z_1 + z_2 + z_3)\big) = u_2 - u_3,$$

adică $u_2 - u_3 = a(u_1 - u_3)$.

Deoarece $a = e^{i\frac{\pi}{3}} = cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}$, avem că

$$|a| = 1, arg(a) = \frac{\pi}{3},$$

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

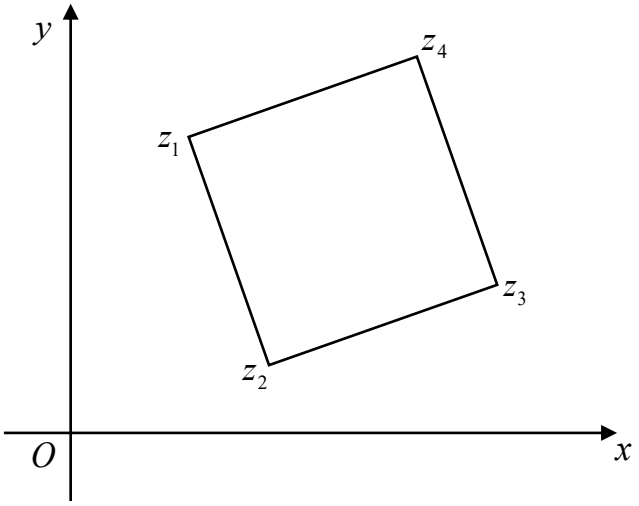
de unde vectorul $\overrightarrow{O_3O_2}$ se obține din vectorul $\overrightarrow{O_3O_1}$ rotindu-l cu unghiul $\frac{\pi}{3}$ împotriva acelor de ceasornic. Deci $\triangle\, O_1O_2O_3$ este echilateral.

Observație. Această problemă i se atribuie lui Napoleon, de aceea triunghiul indicat se mai numește triunghiul exterior al lui Napoleon pentru $\triangle\, ABC$.

■

Problema 4. Două vârfuri vecine ale unui pătrat se află în punctele z_1, z_2. Să se afle celelalte coordonatele celorlalte două vârfuri.

Soluție. Fie $z_1z_2z_3z_4$ este pătratul dat.



Vectorul $\overrightarrow{z_1z_4}$ se obține din vectorul $\overrightarrow{z_1z_2}$ rotind ultimul la unghiul $\frac{\pi}{2}$ împotriva acelor de ceasornic, ceea ce este echivalent cu înmulțirea coordonatelor complexe a vectorului $\overrightarrow{z_1z_2}$ la numărul i.

De aceea $z_4 - z_1 = i(z_2 - z_1)$ și $z_4 = z_1 + i(z_2 - z_1)$.

Deoarece $z_4 - z_1 = z_3 - z_2$, se obține $z_3 - z_2 = i(z_2 - z_1)$, de unde urmează $z_3 = z_2 + i(z_2 - z_1)$.

Evident, există și un alt pătrat amplasat simetric în raport cu dreapta care trece prin punctele z_1 și z_2, vârfurile căruia z_3' și z_4' sunt situate în partea de jos (stânga) a dreptei z_1z_2. În acest caz coordonatele vârfurilor z_3' și z_4' se determină conform formulelor:

$$z_3' = z_2 - i(z_2 - z_1),\ z_4' = z_1 - i(z_2 - z_1).$$

■

Bibliografie

1. ACHIRI, I.; CIOBANU, V.; EFROS, P.; GARIT, V.; NEAGU, V.; PRODAN, N.; TARAGAN, D.; TOPALĂ A. *Matematică.* Ediția a II-a revizuită și completată, Manual pentru clasa a XI. Chișinău: Prut internațional, 2014.
2. ПОНТРЯГИН, Л.С. *Обобщения чисел*. Москва: Наука, 1986.
3. ЯГЛОМ, И.М. *Комплексные числа.* Москва: Наука, 1963.

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

CZU: 519.673:512

REZOLVAREA UNOR SISTEME DE ECUAȚII ALGEBRICE

Leonid DOHOTARU
Ion JARDAN
Universitatea Tehnică a Moldovei
e-mail: leonid.dohotaru@mate.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md

Rezumat. În acest material sunt prezentate diferite metode de rezolvare a unor sisteme nestandarde de ecuații algebrice. Exemplele și soluțiile propuse vor contribui la formarea unor abilități practice de rezolvare a sistemelor de ecuații non-standard.
Cuvinte cheie: ecuație algebrică, sistem de ecuații algebrice, soluție.

Abstract. In this material, different methods of solving non-standard systems of algebraic equations are presented. The proposed examples and solutions will contribute to the formation of practical skills for solving systems of non-standard equations.
Keywords: algebraic equation, system of algebraic equations, solution.

La rezolvarea unor sisteme nestandarde nu întotdeauna este posibil de a observa acea combinație a ecuațiilor date, care duce la obținerea soluției, cât și de a găsi acele transformări, care ar permite simplificarea considerabilă a acestora. Evident, nu există procedee generale pentru a rezolva astfel de sisteme. Numai acumularea unei practici suficiente de rezolvare a acestora poate ajuta la identificarea și evidențierea acelor particularități ale sistemului propus, care permit în final de al reduce la un alt sistem, ce se rezolvă simplu.

Vom considera câteva exemple de sisteme de ecuații algebrice la rezolvarea cărora este necesar de a manifesta o careva ingeniozitate.

Exemplul 1. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2y^2x - yx^5 = 1 \\ y + 3x^4 = 10y^2x^5 \end{cases} \quad (1).$$

Soluție. Vom încerca să exprimăm una din variabile prin cealaltă.

Deoarece variabila x intră în ecuațiile sistemului în diverse forme (x, x^4 și x^5), este greu de a aștepta ca să putem exprima x prin y, din această cauză vom încerca să exprimăm y prin x. Pentru acesta este suficient să excludem, prin reducere, termenii ce conțin y^2.

Observăm că $x \neq 0$, deoarece dacă $x = 0$, atunci prima ecuație devine $0 - 0 = 1$, ceea ce este imposibil. Înmulțind prima ecuație cu $5x^4$ și adunând-o la ecuația a doua, se obține

$$10y^2x^5 - 5yx^9 + y + 3x^4 = 5x^4 + 10y^2x^5 \Leftrightarrow$$
$$-5yx^9 + y = 2x^4 \Leftrightarrow y(1 - 5x^9) = 2x^4.$$

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

Așadar, sistemul (1) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2y^2x - yx^5 = 1 \\ y(1-5x^9) = 2x^4 \end{cases} \quad (2).$$

Menționăm, că $1 - 5x9 \quad \neq 0$, deoarece dacă admitem că $1 = 5x^9$, obținem în ecuația a doua $x = 0$, dar $x \neq 0$. Deci sistemul (2) este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} 2y^2x - yx^5 = 1 \\ y = \frac{2x^4}{1-5x^9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{2x^4}{1-5x^9}\right)^2 \cdot x - \frac{2x^4}{1-5x^9} \cdot x^5 = 1 \\ y = \frac{2x^4}{1-5x^9} \end{cases} \quad (3).$$

Prima ecuație din sistem poate fi scrisă

$$\frac{8x^9}{(1-5x^9)^2} - \frac{2x^9}{1-5x^9} = 1 \quad (4).$$

Notăm $x^9 = t$. Atunci ecuația (4) se scrie în forma

$$\frac{8t}{(1-5t)^2} - \frac{2t}{1-5t} = 1 \quad (5).$$

Înmulțind ambele părți a ecuației (5) cu $(1-5t)^2$, ceea ce avem dreptul să facem deoarece $1 - 5x9 \quad \neq 0$, adică $1 - 5t \neq 0$, se obține ecuația $15t^2 - 16t + 1 = 0$, de unde $t = \frac{1}{15}$ sau $t = 1$. Prin urmare pentru ecuația (4), avem $x = 15^{-\frac{1}{9}}$ sau $x = 1$.

Acum din ecuația a doua a sistemului (3), se obține pentru $x = 15^{-\frac{1}{9}}$, $y = 3 \cdot 15^{-\frac{4}{9}}$, iar pentru $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$.

$$S = \left\{\left(15^{-\frac{1}{9}}; 3 \cdot 15^{-\frac{4}{9}}\right), \left(1; -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Exemplul 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ yz + z^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2 \\ 2y^2 + 18xy^2 - z^2 = 10x^2z \end{cases} \quad (6).$$

Soluții. Vom încerca să exprimăm una din necunoscute prin celelalte.

După o analiză a posibilităților existente, vom încerca să exprimăm x prin y și z, adică de fapt x^3, deoarece este imposibil de a elimina simultan termenii cu x^2 și x^3, iar eliminarea termenilor care conțin x și x^2 este posibilă. Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație a sistemului (6) cu z, a doua ecuație cu $6y$, iar a treia ecuație cu y (desigur în condițiile $z \neq 0$, $y \neq 0$), și adunând parte cu parte cele trei ecuații obținute, avem
$2z^3 + yz^2 + 10x^2yz + 6y^2z + 6yz^2 + 54x^3y^3 + 2y^3 + 18xy^3 - yz^2 = 18xy^3 + 10x^2yz$.

După efectuarea reducerii termenilor asemenea, se obține

$2z^3 + 6yz^2 + 6y^2z + 2y^3 = -54x^3y^3 \Leftrightarrow z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 = -27x^3y^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (z+y)^3 = (-3xy)^3$, de unde conchidem că $z + y = -3xy$ (7).

Dacă $z = 0$, atunci sistemul (6) are forma

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

$$\begin{cases} 10x^2y = 0 \\ 9x^3y^2 = 3xy^2 \\ 2y^2 + 18xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

adică avem soluția $(0,0,0)$.

Dacă $y = 0$, atunci sistemul (6) devine $\begin{cases} 2z^2 = 0 \\ z^2 = 0 \\ -z^2 = 10x^2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$, adică avem soluția $(c, 0,0), c \in \mathbb{R}$, care conține soluția $(0,0,0)$ de mai sus.

Dacă $y = 0$ și $z = 0$, ca și în cazul de mai sus, se obține soluția $(c, 0,0), c \in \mathbb{R}$.

Deci în continuare $z \neq 0$, $y \neq 0$.

Ecuația (7) este consecința sistemului (6).

Exprimăm din (7) pe z prin x și y: $z = -y(3x + 1)$. Substituind z în ecuația a doua a sistemului (6), se obține

$$-y^2(3x+1) + y^2(3x+1)^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2 \Leftrightarrow y^2\left(-3x - 1 + 9x^2 + 6x + 1 + 9x^3 - 3x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(9x^3 + 9x^2) = 0 \Leftrightarrow 9x^2y^2(x + 1) = 0 \quad (8).$$

Sistemul $\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ 9x^2y^2(x + 1) = 0 \end{cases}$ (9), care este o consecință din sistemul inițial (6), și este echivalent cu totalitatea a următoarelor trei sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ x = 0 \end{cases} \quad (10);$$

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ y = 0 \end{cases} \quad (11);$$

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ x = -1 \end{cases} \quad (12).$$

Sistemul (10) are o singură soluție $(0,0,0)$, ceea ce este imposibil, deci sistemul (10) nu are soluții.

În sistemul (11) avem $y = 0$, ceea ce nu poate fi, prin urmare sistemul nu are soluții.

Să rezolvăm sistemul (12). Substituind $x = -1$ în prima și a doua ecuație a sistemului, se obține sistemul

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10y = 0 \\ z + y = 3y \\ x = -1 \end{cases} \quad (13).$$

Primele două ecuații a sistemului (13) formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute, care se rezolvă prin metoda substituției.

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10y = 0 \\ z + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 4y^2 + 2y^2 + 10y = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 10y = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y(y+1)=0 \\ z=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=0 \end{array}\right. \\ z=2y \end{cases}.$$

Deoarece $y=0$ nu poate fi, urmează $y=-1$ și respectiv $z=-2$. Deci soluția sistemului (12) este tripletul $(-1,-1,-2)$.

Așadar, am determinat toate soluțiile sistemelor (10) – (12), prin urmare și ale sistemului (9), și cu cele două cazuri particulare de la început, avem toate soluțiile sistemului (6).

Verificarea soluțiilor găsite prin substituirea lor în ecuațiile sistemului inițial, confirmă că soluții străine nu sunt.

$$S=\{(-1,-1,-2),(c,0,0)|c\in\mathbb{R}\}.$$

Exemplul 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} y^3x=25 \\ 3y+x=7 \end{cases} \quad (14).$$

Soluții. Din forma dată a sistemului, rezultă că valorile reale ale necunoscutelor x și y, dacă sistemul le admite, nu pot fi decât strict pozitive.

Utilizând inegalitatea dintre media geometrică și aritmetică, se obține

$$\sqrt[4]{y^3x}=\sqrt[4]{y\cdot y\cdot y\cdot x}\leq\frac{y+y+y+x}{4}=\frac{3y+x}{4},$$

adică $\sqrt[4]{25}\leq\frac{7}{4}\Leftrightarrow\sqrt{5}\leq 1{,}75$, ceea ce este imposibil.

Deci sistemul (14) nu admite soluții reale.

$$S=\emptyset.$$

Bibliografie

1. *Сборник задач по математике для поступающих во втузы под ред. М. И. Сканави*. Мир и Образование, Москва, 2006.
2. ACHIRI, I.; CIOBANU, V.; EFROS, P.; GARIT, V.; NEAGU, V.; PRODAN, N.; TARAGAN, D.; TOPALĂ, An. *Matematică (manual cl. XI)*. Chișinău: Editura Prut, 2020.
3. COȘNIȚĂ, C.; TURTOIU, F. *Probleme de algebră*. București: Editura Tehnică, 1989.

© Dohotaru Leonid, Jardan Ion, 2022

CZU: 519.642

UNELE METODE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR ȘI INTEGRALELOR DEFINITE

Traian DUMINICĂ

Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare” Câmpulung Moldovenesc, România

e-mail: traian_duminica@yahoo.com

Rezumat. Articolul prezintă trei modalități de abordare a calculului primitivelor și integralelor definite. Aplicațiile alese sunt, în general, generalizări ale unor integrale cunoscute sau exemplificări elocvente pentru metoda propusă. Subiectul ales are drept grup țintă profesorii de liceu, elevii din anul terminal al ciclului liceal superior și studenții din anul I care studiază elemente de analiză matematică.

Cuvinte cheie: Principiul dualității, integrală, dual, centru de simetrie, funcție impară.

Abstract. The article presents three different techniques for calculating antiderivatives and definite integrals. The chosen examples are mostly generalizations of known integrals or relevant examples that illustrate the techniques. The topic targets high school teachers, students in their last year of high school and first year university students that take calculus.

Keywords: Duality principle, integral pairs and triples, auxiliary function, centre of symmetry, odd function.

Integralele definite au un rol important în determinarea practică a unor mărimi fizice asociate reprezentărilor grafice ale funcțiilor reale de variabilă reală, prezentate elevilor din clasa a XII-a de liceu: aria suprafețelor plane, volumul corpurilor de rotație, aria suprafețelor de rotație, lungimea graficului unei funcții, coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene.

Voi prezenta trei modalități de abordare a calculului integralelor definite prezentate elevilor din clasa terminală a ciclului liceal superior, cu exemplificările de rigoare.

I. Pentru început evidențiem principiul dualității, integrala duală (sau integrala pereche, integrala „soră”, integrala „frățior”) asociată unei integrale definite sau nedefinite.

a) Să se calculeze:

$$I = \int \frac{sinx}{asinx + bcosx} dx\,, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0, x \in D$$
$$\subset \{x \in \mathbb{R} | asinx + bcosx \neq 0\}, D - interval$$

Considerăm integrala $J = \int \frac{cosx}{asinx+bcosx} dx$, pe care o vom numi *duala* integralei I. Atunci:

$$aI + bJ = \int \frac{asinx+bcosx}{asinx+bcosx} dx = x + C \qquad (1)$$

$$-bI + aJ = \int \frac{-bsinx+acosx}{asinx+bcosx} dx = \int \frac{(asinx+bcosx)'}{asinx+bcosx} dx = ln|asinx + bcosx| + C \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$I = \frac{a}{a^2 + b^2} x - \frac{b}{a^2 + b^2} ln|asinx + bcosx| + C$$

© Duminica Traian, 2022

și $J = \frac{b}{a^2+b^2}x + \frac{a}{a^2+b^2}ln|asinx + bcosx| + C$ (3)

Generalizare. Determinați:

$$I_1 = \int \frac{\alpha sinx + \beta cosx}{asinx + bcosx}dx\,, \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0, x \in D$$
$$\subset \{x \in \mathbb{R} | asinx + bcosx \neq 0\}, D - interval$$

Evident $I_1 = \alpha I + \beta J$, cu I și J date de relația (3), adică:

$$I_1 = \frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}x + \frac{a\beta - b\alpha}{a^2 + b^2}ln|asinx + bcosx| + C$$

b) Să se calculeze: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^n x}{sinx+cosx}dx\,, n \in \mathbb{N}^*$.

Considerăm integrala $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx+cosx}dx$, pe care o vom numi *duala* integralei I_n. Atunci:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx+cosx}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^n x}{cosx+sinx}dx = I_n \Rightarrow J_n = I_n \quad (4)$$

Notăm: $\frac{\pi}{2} - x = t \Rightarrow dx = -dt; x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Vom determina I_n pentru $n \in \{1,2,3\}$.

Avem: $I_1 + J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx+cosx}{sinx+cosx}dx = \frac{\pi}{2} \overset{(4)}{\Rightarrow} I_1 = \frac{\pi}{4}$.

$$I_3 + J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^3 x + cos^3 x}{sinx + cosx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2 x - sinx \cdot cosx + cos^2 x)dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}sin2x\right)dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}cos2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-1}{2} \Rightarrow I_3 = \frac{\pi-1}{4}.$$

$$I_2 + J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sinx + cosx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx + cosx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cost}dt =$$

Notăm: $x - \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow dx = dt; x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cosx}dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{cos^2 x}dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(sinx)'}{1 - sin^2 x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} ln \frac{1 + sinx}{1 - sinx} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - 0\right) =$$
$$= \sqrt{2}ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \Rightarrow I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}ln\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

c) Să se calculeze: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^n x}{sin^n x+cos^n x}dx\,, n \in \mathbb{N}^*$.

Considerăm integrala $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^n x+cos^n x}dx$, pe care o vom numi *duala* integralei I_n. Atunci:

© Duminica Traian, 2022

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^n x + cos^n x} dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^n x}{cos^n x + sin^n x} dx = I_n \Rightarrow J_n = I_n$

(5)

Notăm: $\frac{\pi}{2} - x = t \Rightarrow dx = -dt; x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Avem: $I_n + J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^n x + cos^n x}{sin^n x + cos^n x} dx = \frac{\pi}{2} \overset{(5)}{\Rightarrow} I_n = \frac{\pi}{4}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$

II. O altă metodă de calcul a integralelor definite este realizarea unei schimbări convenabile de variabilă astfel încât după efectuarea acesteia să obținem integrala inițială.

a) Să se calculeze: $I(a) = \int_0^a ln(ctga + tgx)dx, a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

Avem: $I(a) = \int_0^a ln(ctga + tgx)dx = -\int_a^0 ln\big(ctga + tg(a-t)\big)dt = \int_0^a ln\left(ctga + \frac{tga - tgx}{1 + tgatgx}\right) dx =$

Notăm: $a - x = t \Rightarrow dx = -dt; x = 0 \Rightarrow t = a, x = a \Rightarrow t = 0$

$$= \int_0^a ln \frac{ctga + tga}{tga(ctga + tgx)} dx = aln \frac{ctga + tga}{tga} - I(a) \Rightarrow I(a) = \frac{a}{2} ln \frac{ctga + tga}{tga}$$

$$\Rightarrow I(a) = -aln(sina).$$

Observații. 1) Integrala mai cunoscută este $I\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + tgx)dx = \frac{\pi ln2}{8}.$

2) Strâns legată de integrala de mai sus este și: $J(a) = \int_0^a \frac{ln(a+x)}{a^2+x^2} dx, a \in (0, \infty)$

Avem: $J(a) = \int_0^a \frac{ln(a+x)}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(a + atgt)dt = \frac{\pi lna}{4a} + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + tgx)dx \Rightarrow$

Notăm: $t = arctg\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} dt = \frac{1}{x^2+a^2} dx; x = 0 \Rightarrow t = 0, x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow J(a) = \frac{\pi ln2a^2}{8a}, a > 0.$ Mai cunoscută este integrala: $J(1) = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi ln2}{8}.$

b) Să se calculeze: $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} e^{arctgx} dx.$

Avem: $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} e^{arctgx} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} e^{arctgx} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (e^{arctgx})' dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} e^{arctgx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} e^{arctgx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} - 1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} (e^{arctgx})' dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{arctgx} \Big|_0^1 - I \Rightarrow I = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} - 1 - I \Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}.$$

III. O a treia modalitate de calcul a integralelor definite poate fi folosirea centrului de simetrie al graficului unei funcții, dacă el există.

Propoziția 1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că graficul său admite un centru de simetrie $C(a, b)$. Atunci $\int_0^{2a} f(x)dx = 2ab.$

Justificare. $C(a, b)$ este centru de simetrie al graficului funcției f, rezultă:

© Duminica Traian, 2022

$$f(a-x)+f(a+x)=2b, (\forall)x\in\mathbb{R} \quad (6)$$

Avem: $\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx=-\int_a^0 f(a-t)dt+\int_0^a f(a+t)dt=$

Pentru prima integrală notăm: $x=a-t\Rightarrow dx=-dt; x=0\Rightarrow t=a, x=a\Rightarrow t=0$

Pentru a doua integrală notăm: $x=a+t\Rightarrow dx=dt; x=a\Rightarrow t=0, x=2a\Rightarrow t=a$

$=\int_0^a\big(f(a-x)+f(a+x)\big)dx\overset{(6)}{=}\int_0^a 2bdx=2ab\Rightarrow\int_0^{2a} f(x)dx=2ab.$

Propoziția 2. Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție impară, atunci punctul $C(a,b)$ este centru de simetrie pentru graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x-a)+b, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că: $g(a-x)+g(a+x)=2b, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

Avem:

$$g(a-x)+g(a+x)=f(a-x-a)+b+f(a+x-a)+b=f(-x)+f(x)+2b$$
$$=-f(x)+f(x)+2b=2b, (\forall)x\in\mathbb{R}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Aplicații

1) Să se arate că: $\int_0^2 \frac{2x^2+ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)-4x+4}{x^2-2x+2}dx=4.$

2) Să se arate că: $\int_0^{\pi} \frac{1-cosx+sin^2x-sin2x}{2-cos^2x}dx=\pi.$

Justificare

1) Se ține cont de faptul că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ este funcție impară și se aplică propozițiile 1. și 2. pentru $a=b=1$.

2) Se ține cont de faptul că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{sinx+sin2x}{1+cos^2x}$ este funcție impară și se aplică propozițiile 1. și 2. pentru $a=\frac{\pi}{2}$ și $b=1$.

Bibliografie

1. ION, I. D.; NEDIȚĂ, N. I.; GHIOCA, A. P. *Matematică. Manual pentru clasa a XII – a, M1*. Editura Sigma, 2007.
2. DRAGOMIR, L.; DRAGOMIR, A.; BĂDESCU, O. *Probleme de matematică pentru clasa a XII-a*. Editura Paralela 45, 2016.
3. BURTEA, M.; BURTEA, G. *Matematică. Culegere de exerciții și probleme, clasa a XII-a*. Editura Carminis, 2008.

© Duminica Traian, 2022

CZU: 378.147:004

EXPLORAREA METODELOR DE PREDARE A CURSULUI DE PROGRAMARE „LIMBAJE DE ASAMBLARE”

Ala GASNAȘ
Catedra de Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: alagasnas@gmail.com

Rezumat. „Limbaje de asamblare” este unul dintre cursurile de bază pentru studenții cu specializare în informatică. Însă, limbajul de asamblare este unul orientat pe mașină, ceea ce îl face să fie un limbaj complicat în instruire, neintuitiv. Astfel, problema elucidării unor metode eficiente de predare este esențială. În această lucrare au fost analizate problemele ce apar în predarea acestui curs, fiind propuse metode moderne de predare care au fost folosite de autor în practica proprie pentru o însușire mai eficientă de către studenți a acestui limbaj de programare.
Cuvinte-cheie: limbaj de asamblare, metode de predare, metoda proiectelor, gândire inversă, gândire divergentă, învățare eficientă, demers educativ.

Summary. "Assembly languages" is one of the basic courses for students specializing in computer science. But assembly language is machine-oriented, which makes it a complicated language in training, unintuitive. Thus, the issue of elucidating effective teaching methods is essential. In this paper we analyzed the problems that arise in teaching this course and proposed modern teaching methods applied personally by the author for a more efficient acquisition of this programming language by the students**.**
Keywords: assembly language, teaching methods, project method, reverse thinking, divergent thinking, effective learning, educational approach

1. Introducere

Programarea în limbajul de asamblare este un curs de bază pentru studenții care studiază la specialitatea *Informatică*. Limbajul de asamblare nu este doar un curs precursor necesar pentru alte cursuri, ci este unul esențial și are un rol important în pregătirea studenților pentru a stăpâni tehnologia de programare, competența în operarea calculatorului și tehnologia de depanare a programelor. Ca limbaj de programare de nivel jos, orientat pe mașină, limbajul de asamblare este mai eficient decât alte limbaje în apelarea resurselor. Cu toate acestea, majoritatea studenților au oarecare temeri în raport cu acest curs, având diferite dificultăți în înțelegerea unor teme relevante.

Unele dintre motive sunt următoarele: structura programului în limbajul de asamblare nu este una trivială; limbajul este relativ complex; rezultatele depanării pe computer nu sunt la fel de evidente ca cele ale altor limbaje de nivel înalt. Prin urmare, pentru o însușire mai eficientă a acestui limbaj este necesar de a folosi metode moderne de predare, care sunt centrate pe student și care deja și-au demonstrat eficiența în cadrul demersului educativ.

© Gasnas Ala, 2022

2. Motivația cercetării

Limbajul de asamblare nu este doar cel mai rapid și cel mai eficient limbaj de programare, ci și singurul limbaj capabil să exploateze pe deplin hardware-ul unui calculator. Acest limbaj este indispensabil în rezolvarea cazurilor sensibile la viteză. Astfel, majoritatea sistemelor de operare, a compilatoarelor și alte programe sensibile la viteză sunt scrise în limbajul de asamblare [1]. Cu toate acestea, deoarece limbajul dat este unul de nivel jos, cu instrucțiuni rigide și foarte dependent de hardware-ul calculatorului, dificultatea de a studia și a însuși acest limbaj este considerabilă. Sarcina cursului „Limbaje de asamblare" este de a preda instrucțiunile lexicale, gramaticale și pseudoinstrucțiunile limbajului de asamblare, de a reprezenta datele în acest limbaj, structurile de control de bază, metoda de proiectare a subrutinelor, metoda de proiectare a programelor de intrare–ieșire și a întreruperilor. Acestea le permit studenților să stăpânească conceptele de bază, metodele și abilitățile de programare în limbajul de asamblare și să cultive capacitatea acestora de a citi, analiza, proiecta și depana programele în limbajul dat.

Limbajul are un număr mare de instrucțiuni cu reguli gramaticale stricte. Prin urmare, pentru studenți, învățarea eficientă a acestui curs este foarte dificilă, ca să nu mai vorbim de aplicarea cu pricepere a limbajului de asamblare. Ca rezultat, modul de îmbunătățire a metodelor de predare a cursului „Limbaje de asamblare" în scopul de a obține rezultate bune este o problemă majoră pentru fiecare profesor. În continuare voi expune câteva sugestii de aplicare a metodelor de predare reieșind din experiența proprie.

3. Utilizarea metodelor și a mijloacelor avansate de predare

Folosirea metodelor tradiționale de predare a caracteristicilor limbajului de asamblare nu are ca rezultat un efect spectaculos în însușirea acestui limbaj. Luând în considerare faptul că actualmente studenții au capacități foarte bune de gândire și de învățare, dar capacitatea de autogestionare este relativ slabă, ar trebui să fie integrate o varietate de metode de predare, care ar asigura învățarea, înțelegerea și stăpânirea caracteristicilor limbajului de asamblare cât mai mult posibil în sala de clasă.

Bazele cursului includ în principal conceptele relevante, definițiile și regulile gramaticale, care nu implică algoritmi complecși, dar conținutul în sine trebuie să fie înțeles clar și să fie memorat. Conținutul este relativ simplu, concentrarea ar trebui să fie pe memorie și înțelegere, iar în implementarea predării ar trebui să punem accent pe înțelegerea conținutului prin antrenament repetitiv pentru a atinge obiectivele didactice preconizate.

Partea de proiectare a programului este mai flexibilă decât partea conceptelor de bază. În această etapă, ideile de algoritm sunt combinate cu conceptele teoretice de bază pentru a obține o programare flexibilă. Partea practică se concentrează pe înțelegerea

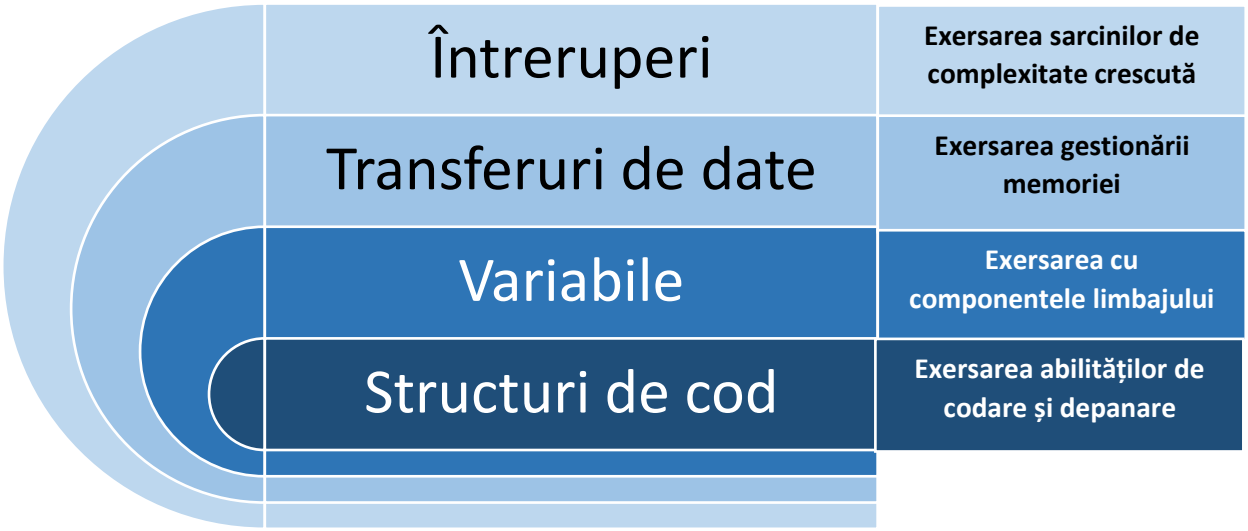
© Gasnas Ala, 2022

caracteristicilor limbajului prin aplicarea lor în proiectarea programelor, precum și a metodelor de proiectare a programelor.

Implementarea conținutului predat necesită combinarea diferitor metode de predare, cum ar fi metoda bazată pe proiecte, metoda gândirii inverse [2], metoda gândirii divergente; se acordă mai multă atenție activităților experimentale, iar prin activitatea experimentală se consolidează teoria conștientizării și înțelegerii, precum și metodele de colaborare reciprocă între studenți.

Metoda bazată pe proiecte. Inițial, cursul „Limbaje de asamblare" debutează cu proiecte foarte simple pentru a introduce treptat studenții în conceptul de programare low-level, folosind codul care îi ajută să analizeze și să înțeleagă organizarea programelor și sintaxa. Pe măsură ce procesele și vocabularul devin rutină, complexitatea sarcinilor crește. Proiectele au fost concepute pentru a utiliza secțiunile de cod anterioare, cu care studenții sunt deja familiarizați, pentru a ajuta la dezvoltarea unei înțelegeri puternice a ceea ce se întâmplă și a modului în care funcționează diferitele părți ale codului. La fiecare oră de laborator, studenții și-au dezvoltat abilități de depanare care pot fi aplicate la următoarea oră. În figura ce urmează sunt ilustrate subiectele lucrărilor de laborator și obiectivele cursului. Toate aceste lucrări se bazează pe experiențele obținute din lucrările de laborator anterioare.

Modelul de învățare în sensul creșterii complexității de învățare



Exemplu de proiect

Studenții vor scrie o subrutină de întrerupere pentru a înlocui subrutina de întreruperi standard (SÎS) existentă pentru Control - Break. În mod normal, apăsarea tastei <ctrl-C> va întrerupe programul DOS care rulează la moment. Sarcina este de a scrie un nou SÎS pentru tasta <ctrl-C>. Programul trebuie să declare o variabilă globală în segmentul de date al programului, unde se va face o contorizare a numărului de apăsări ale tastei <ctrl-C>.

© Gasnas Ala, 2022

De fiecare dată când <ctrl-C> este apăsat, subrutina de întrerupere va primi conținutul acestei variabile, apoi va reveni controlul la programul principal. SÎS nou-creat va trebui să salveze registrele pe care le utilizează. Numărul funcției de întrerupere pentru Control - Break este 23h, care este o întrerupere software.

În subrutina creată, programul va salva mai întâi vectorul de întrerupere implicit, apoi va încărca vectorul de întrerupere în subrutina de întreruperi nou-creată. Odată ce întreruperea este configurată, se va afișa următorul mesaj:

Introduceți un caracter de la tastatură:

Programul va verifica dacă este un caracter imprimabil, apoi va imprima caracterul introdus cu spațiu. Imprimarea va continua până când este introdus un alt caracter imprimabil. Dacă este introdus un caracter ce nu poate fi imprimat, imprimarea se oprește și așteaptă până când este introdus un caracter imprimabil, apoi continuă tipărirea noului caracter.

Aceasta va continua până când se introduce caracterul <!>.

Un fragment din programul acestui proiect:

```
Model Small
STACK 100h ;
;==========================================================
CO_DOS    EQU 21h ; codul de întrerupere DOS
KEY       EQU 01h ; citirea simbolului de la keyboard
SCRIE_VI  EQU 02h ; funcția de scriere mod video
RT        EQU 13  ; cod ASCII pentru retur transport
RN        EQU 10  ; cod ASCII pentru trecere rând nou
SCR_STR   EQU 09h ; funcția de scriere a unui string
ENTER_KEY EQU 0Dh ; valoarea pentru caracterul intrat
CTRLC     EQU 23h ; valoarea pentru CTRL-C
;==========================================================
DATASEG
ret_Code   DW 04C00h ; codul returnat
mes1       DB ' Introduceți un caracter de la tastatură: $'
msg2       DB ' <ctrl-c> a fost tastat $'
msg3       DB '  ori$' ; mesajul de ieșire
char       DB ? ; pentru salvarea caracterului introdus
vect1      DW ? ; pentru salvarea bx a vectorului original
vect2      DW ? ; pentru salvarea es a vectorului original
ctrlcont1  DB '0' ; contorizarea tastării ctrl-c
ctrlcont2  DB '0' ; contorizarea tastării ctrl-c
ValFlag    DB 0FFh ; valoarea returnată dacă tasta a fost apăsată
```

Gândirea inversă este capacitatea de a folosi ideile dintr-un domeniu în alt domeniu la nivel cotidian. Dacă o persoană este capabilă de acest lucru nu numai în domeniul profesional, ci și în viața de zi cu zi, aceasta folosește gândirea inversă. Dacă persoana este capabilă de acest lucru doar într-un domeniu profesional, atunci vorbim de o gândire inversă *restricționată* [2]. Descoperirile științifice și soluțiile tehnice ale inginerilor sunt adesea realizate datorită capacității de a vedea asemănări în diferite zone, de a le combina și a include nu numai date experimentale, ci și lucruri create de alți oameni. Pentru a face acest lucru, trebuie să înțelegi rezultatele la care au ajuns alții. Dacă scopul este de a crea ceva nou, trebuie să fii capabil să înțelegi rapid lucrurile (conceptele și conexiunile) din alte domenii – cum au fost descoperite și de ce nu funcționează în alt mod [3].

Gândirea inversă este utilă atunci când înțelegerea subiectului și a altor lucruri devine nesemnificativă dacă subiectul în sine este considerat inutil. Pentru ca subiectul să nu fie respins în mod absolut, cursul trebuie să cuprindă conceptele de bază, tematica acordată cu tendințele actuale din domeniu, precum și minimul necesar pentru a începe familiarizarea cu actualitățile subiectului [4]. Gândirea inversă și gândirea divergentă sunt componente esențiale ale conceptului STEM. Este evident că în conceptul STEM au importanță înțelegerea și creativitatea. Dacă înțelegerea lipsește, subiectul va fi respins. Acest lucru este valabil și în viața de zi cu zi atunci când întâlnești concepte, relații, soluții tehnice inginerești noi, lucruri noi. Prin urmare, pe lângă crearea motivației, trebuie găsite mijloace de înțelegere, iar cunoștințele trebuie utilizate nu numai în domeniul subiectului dat. În acest scop, gândirea inversă este foarte utilă.

Gândirea divergentă este primul pas pentru a obține o soluție creativă. O condiție prealabilă pentru a ajunge la o idee nouă și adecvată, o idee creativă este generarea reală de idei, care este posibilă anume în condițiile gândirii divergente. Thompson L. definește gândirea divergentă ca „deplasarea către exterior de la o problemă în mai multe direcții și gândirea fără limite” [5].

Astfel, în baza exemplelor de mai sus se poate concluziona că ar trebui să se renunțe la predarea tradițională în favoarea metodelor avansate de predare. Prin intermediul multimedia, website-urilor de învățare online, software-lor de simulare, prin vizualizarea conținutului cursului, prin utilizarea procesului interactiv de diversificare a prezentării conținutului cursului, transformând predarea tradițională într-o predare cuprinzătoare, variată, se va îmbunătăți și mai mult confortul achiziției de cunoștințe.

Metodele de evaluare trebuie să acorde o atenție deosebită abilităților practice. Evaluarea finală trebuie să se bazeze pe evaluarea efectuată după fiecare laborator. Doar astfel vor fi fortificate aptitudinile practice ale studenților și, respectiv, interesul față de cursul „Limbaje de asamblare”.

© Gasnas Ala, 2022

Concluzii

Conceptele limbajului de asamblare sunt fundamentale pentru înțelegerea multor domenii ale informaticii. Această lucrare oferă câteva idei despre modul de reformare a predării limbajului de asamblare. Limbajul dat este unul abstract, complicat și greu de învățat pentru studenți, însă dacă profesorii au o înțelegere clară a punctelor-cheie și a dificultăților acestui limbaj, dacă sunt utilizate metode moderne de predare, multimedia în scopul de a inspira pasiunea studenților pentru învățare, dacă se concentrează pe aspectele practice, se pot obține rezultate bune de predare.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. HALL, B. R.; SLONKA, K. J. *Assembly Programming and Computer Architecture for Software Engineers*. 2017. Disponibil pe: https://coderbooks.ru/assembly_programming_and_computer_architecture_for_software_engineers/
2. VITKOVSKIS, R.; HEIDINGERS, U. Use of Models in Reverse Thinking. In: *US-China Education Review B*, 2018. nr. 8(2), p. 75-81. doi: 10.17265/2161-6248/2018.02.003. Disponibil pe: https://www.goscience.eu/download/Teachers%20training/2/Use%20of%20models%20in%20Reverse%20Thinking.pdf
3. CYRIEL, K. 2017. Disponibil pe: https://www.cyrielkortleven.com/reverse-thinking/
4. HIRASHIMA, T.; KURAYAMA, M. *Learning by Problem-Posing for Reverse-Thinking Problems*. Disponibil pe: https://www.researchgate.net/publication/221297778
5. THOMPSON, L. Improving the creativity of organizational work groups. In: *Academy of Management Executive*, 2003. nr. 17(1), p. 96-109.

© Gasnas Ala, 2022

CZU: 37.037:51+371.12

DESPRE COMPETENȚA MATEMATICĂ A CADRELOR DIDACTICE RIN PRISMA UNOR STUDII INTERNAȚIONALE

Mihaela HAJDEU
Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, UST
e-mail: mihaelahajdeu93@gmail.com

Rezumat. În evoluția educației, conceptul de competență și procesul de dezvoltare al societății au devenit aspecte majore ale unei mișcări inovatoare la nivel național și internațional. În ceea ce privește matematica școlară, această evoluție a oferit oportunitatea de a explora modul în care competența matematică atât pentru elevi, adulți cât și pentru cadrele didactice ar putea fi definită și interpretată în scopul de dezvoltării procesului educațional și al societății în general. Acest articol pune accent pe conceptualizarea competenței matematice a cadrelor didactice prin prisma evaluărilor internaționale.
Cuvinte-cheie: cunoștințe; capacități; competență matematică; proces educațional; integrare.

Abstract. In the evolution of education, the concept of competence and the development process of society have become major aspects of an innovative movement at the national and international level. In terms of school mathematics, this development provided an opportunity to explore how mathematical competence for both students, adults and teachers could be defined and interpreted in order to develop the educational process and society in general. This article focuses on the conceptualization of teachers' mathematical competence through the lens of international assessments.
Keywords: knowledge; capabilities; mathematical competence; educational process; integration.

Piața muncii la etapa actuală este angajată într-un flux de transformări digitale profunde și rapide, precum și de schimbări demografice majore. Angajatorii cer de la angajați noi competențe, întrucât acestea reprezintă sfera esențială pentru valorificare potențialului schimbărilor. Primele rezultate ale PIAAC, 2013 (*Program for the International Assessment of Adult Competencies - Programul pentru evaluarea internațională a competențelor adulților*) scot în evidență faptul că competențele slabe limitează accesul oamenilor la locuri de muncă mai productive și mai pline de satisfacție. Mai mult de cât atât, acolo unde o mare parte a adulților au competențe slabe devine dificil să se introducă tehnologii de creștere a productivității și noi moduri de lucru, care la rândul lor blochează îmbunătățirea nivelului de trai.

Programul PIAAC măsoară competențele adulților de vârstă activă (16-65 ani) pe trei domenii: lectură, matematică, utilizarea tehnologiei. Sondajul competențelor adulților definește *competența matematică* ca fiind „capacitatea persoanei de a accesa, utiliza, interpreta și comunica informații și idei matematice pentru a se angaja și a gestiona cerințele matematice ale unei game mari de situații din viața adultă” [7, p. 48]. Un adult, ce deține un anumit nivel de competență matematică, este cel ce răspunde în mod corespunzător la conținutul matematic prezentat în diverse moduri, este cel ce poate gestiona și rezolva problemele într-un context real.

© Hajdeu Mihaela, 2022

Pe de altă parte, competenţa în domeniul matematicii la nivel european a fost identificată ca fiind „una dintre competenţele-cheie pentru împlinirea personală, pentru o cetăţenie activă, pentru incluziunea socială şi pe piaţa muncii în societatea cunoaşterii a secolului XXI” [apud. 1, p. 5].

Competența matematică fiind una din competențele necesare fiecărui adult, aceasta reprezintă una din competențele specifice pe care trebuie să le dețină fiecare cadru didactic, îndeosebi învățătorii. Conform recomandărilor Consiliului Uniunii Europene din 22 mai 2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții, competența matematică este integrată într-un domeniu mult mai larg și anume: competențe în domeniul științei, tehnologiei, ingineriei și matematicii și este definită „drept capacitatea de a dezvolta și de a folosi gândirea și raționamentul matematic pentru a rezolva o serie de probleme în situații de zi cu zi” [3, p. 9]. Pe de altă parte, recomandările respective pun în prim-plan competenței matematice – capacitatea de a stăpâni abilitățile numerice, disponibilitatea de a utiliza diverse moduri de gândire și prezentare a conținuturilor matematice.

Evaluarea internațională PISA 2018 definește competența matematicii drept capacitățile elevului de a formula, utiliza și interpreta matematica într-o varietate de contexte [1]. Acestea includ nu numai situații familiare legate de experiența personală, cum ar fi pregătirea mâncării, efectuarea cumpărăturilor sau vizionarea sporturilor, ci și contexte profesionale, societale și științifice, cum ar fi stabilirea costurilor unui proiect, interpretarea statisticilor naționale sau modelarea diferitor fenomene naturale.

С. І. Стрілець definește competența matematică drept o combinație dintre cunoștințele matematice, experiența activităților matematice precum și abilitatea de a aplica cunoștințele dobândite în situații noi, dar și asupra procesului de autoevaluare [5]. Competența matematică ca competență profesională este construită din mai multe componente: motivațional-axiologică, cognitivă și conativă (stabilirea scopurilor și aptitudinilor de autoreglare) [4, p. 12].

Pe de altă parte, atunci când vorbim despre competența matematică a învățătorilor, aceasta este definită de М. М. Марко drept o „caracteristică calitativă integrală a individului care conține componenta motivațional-axiologică, componenta cognitivă, componenta operațională și reflexiv-creativă care caracterizează pregătirea psihologică, teoretică și practică a cadrului didactic pentru activitatea de predare – învățare - evaluare a matematicii în clasele primare și asigurarea rezultatelor învățării în rândul elevilor de vârstă școlară mică” [apud 8, p. 416]. M. Hajdeu include în structura competenței matematice a învățătorului, format în instituțiile de învățământ profesional tehnic postsecundar nonterțiar (ISCED 5) următoarele componente: motivațional-evaluativă, conceptual-cognitivă, operațional-tehnologică, reflexivă, integrativă - acestea punând accent pe pregătirea matematică, morală, psihologică și pedagogică a cadrelor didactice

© Hajdeu Mihaela, 2022

pentru activitatea profesională [2]. Totodată, cadrele didactice ar trebui să dețină atât cunoștințe din domeniul pedagogiei cât și cunoștințe din domeniul matematicii, conform [6, p. 25], întrucât acestea reprezintă baza calității instruirii, dar și nivelul de performanță al elevilor.

Studiul internațional TIMSS al IEA *(Trends in International Mathematics and Science Study: Programul de evaluare internaţională a elevilor la matematică şi ştiinţe),* care evaluează performanțele elevilor din clasele a IV-a și a VIII-a, definește termenul de competență matematică ca un ansamblu de cunoștințe pe care le dețin elevii în raport cu anumite fenomene matematice, precum și capacitatea acestora de a utiliza noțiunile matematice la rezolvarea problemelor și la formularea propriilor concluzii. În anul 2019 la evaluarea TIMSS au participat 64 de țări, printre care și România (doar elevii clasei a VIII-a). Evaluarea competenței matematice în rândul elevilor din clasa a IV-a s-a axat pe trei domenii: aritmetică, elemente de geometrie/măsurare și date, iar pentru elevii de clasa a VIII pe patru domenii: aritmetică, algebră, geometrie și probabilitate [10].

Conform rezultatelor acestui studiu, elevii clasei a VIII-a din Romania sunt mai puțin competitivi la matematică decât elevii europeni, obținând un scor de 479 puncte comparativ cu media internațională de 500 puncte, chiar dacă există o creștere cu 21 puncte, comparativ cu anul 2007. Lideri la matematică în cadrul evaluării TIMSS 2019 continuă să rămână țările asiatice (Singapore, Hong Kong, Coreea de Sud) [9].

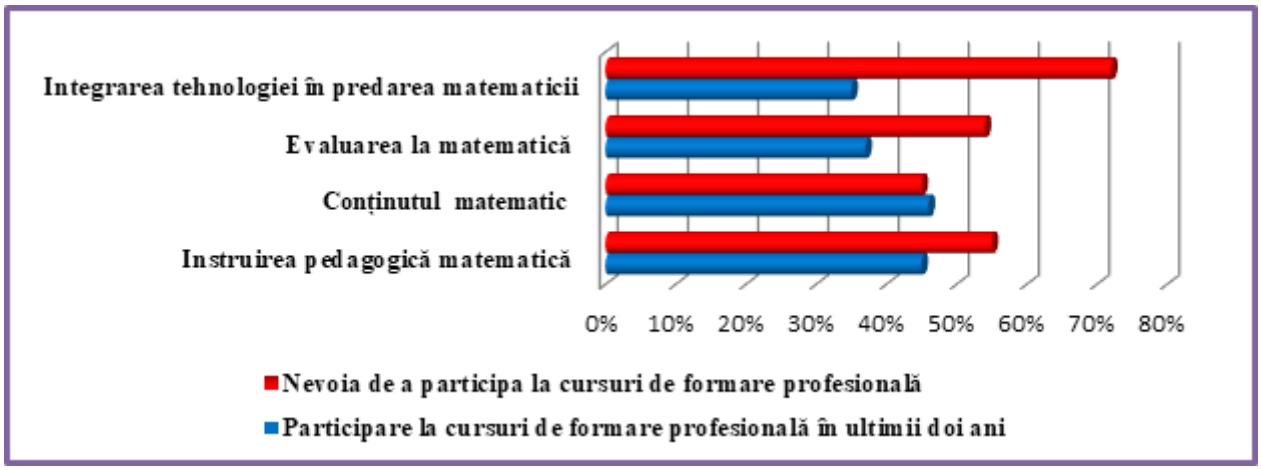


Figura 1. Participarea și nevoia de dezvoltare profesională a profesorilor de matematică (clasa a IV-a)

De asemenea acest studiu a scos în evidență decalajul considerabil al cadrelor didactice între nevoia de dezvoltare profesională și oportunitățile acestora. 70 la sută dintre pedagogii chestionați, au raportat nevoia de dezvoltare profesională. Pe de altă parte, 35% dintre elevii din clasele primare care au participat la acest studiu au avut învățători care în ultimii doi ani au participat la cursuri de formare profesională legate de integrarea tehnologiei în procesul de predare a matematicii, iar 71% din profesorii care

© Hajdeu Mihaela, 2022

predau matematica în clasele a VIII-a au raportat nevoia de a participa la asemenea cursuri. Totodată, peste jumătate din învățătorii claselor a IV-a au raportat că au nevoie de cursuri de formare legate de următoarele domenii: Instruirea pedagogică matematică, Conținutul matematic, Evaluarea la matematică (Fig.1). Procentajul este mult mai mare pentru profesorii ce predau matematica la treapta gimnazială (clasa a VIII-a, Fig. 2).

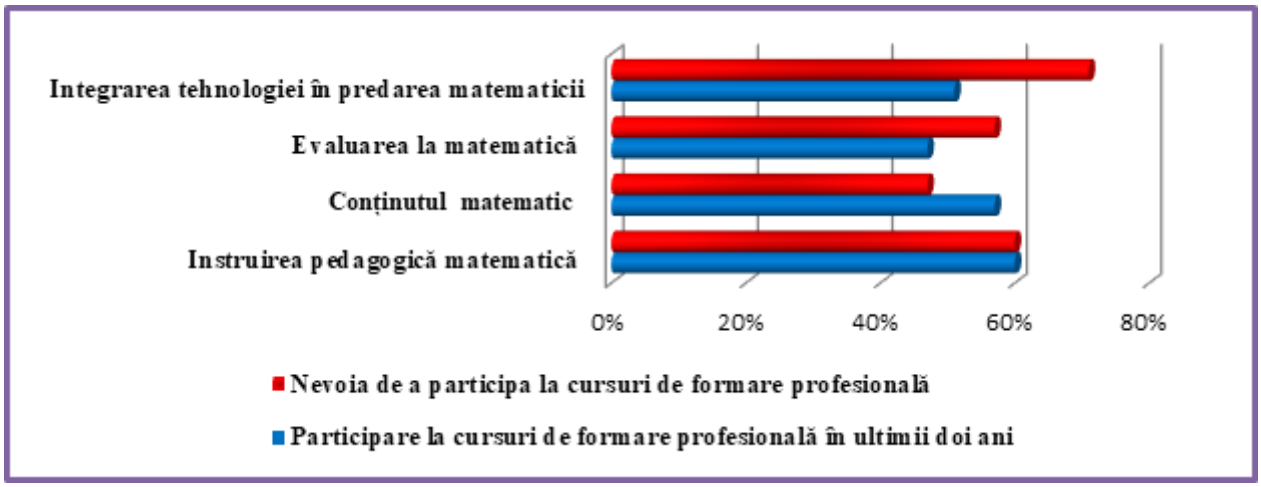


Figura 2. Participarea și nevoia de dezvoltare profesională a profesorilor de matematică (clasa a VIII-a)

Studiul TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) a cercetat modul în care diferite țări își pregătesc pedagogii pentru a preda matematica în școlile primare și cele secundare în funcție de următoarele domenii:

1. Conținutul matematic (mulțimi de numere, algebră, geometrie, proporții și procente, funcții, probabilitate etc.);
2. Domeniul cognitiv (subdomeniile cunoașterii, aplicării și raționamentului);
3. Domeniul curricular.

Viitorii învățători, conform studiului TEDS-M, deși în general au fost capabili să recunoască beneficiul unei strategii de predare și să evalueze munca elevilor, totuși aceștia cu dificultate au identificat elementele problemei și au utilizat reprezentările concrete pentru a sprijini învățarea elevilor. Totodată cu unele dificultăți au înțeles unele concepte de măsurare pentru reformularea sau proiectarea unei sarcini. Studiul mai scoate în evidență faptul că viitorii învățători nu întotdeauna conștientizează de ce o anumită strategie de predare are sens sau dacă va funcționa întotdeauna, sau dacă poate fi generalizată la toate clasele.

Prin urmare concluzionăm că pentru fiecare cadru didactic, inclusiv pentru cel din învățământul primar competența matematică este o competență de bază, indispensabilă, la toate etapele de formare, dar mai ales la cea inițială.

© Hajdeu Mihaela, 2022

Bibliografie

1. HAJDEU, M. *Relația dintre evaluările internaționale PISA și evaluările naționale de absolvire a gimnaziului privind manifestarea competenței matematice la elevi*. Fundația Soros Moldova. Chișinău, 2020. 43 p. SBN 978-9975-3483-2-4.
2. HAJDEU, M. Specificul și structura competenței matematice a învățătorului de clase primare. In: *Studia Universitatis Moldaviae (Seria Ştiinţe ale Educaţiei)*. Nr. 5(155), 2022. pp. 68-74. ISSN 1857-2103.
3. Recomandarea Consiliului Uniunii Europene din 22 mai 2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții (Text cu relevanță pentru SEE). In: *Jurnalul Oficial al Uniunii Europene*. (Disponibil: https://eur-lex.europa.eu/. Accesat 06-06-2022).
4. НИЗАМИЕВА, Л. Ю. Дифференцированная профессионально-ориентированная математическая подготовка специалистов экономического профиля с использованием мультимедийных технологий. Автореферат. Казань, 2010. 24 с.
5. СТРІЛЕЦЬ, С. І. Теоретико-методичні засади підготовки вчителів початкової школи засобами інноваційних технологій. Проблеми соціальної роботи: філософія, психологія, соціологія. 2013. N. 2 (3). с. 125-130.
6. NILSEN, T.; GUSTAFSSON, J-E. Teacher quality, instructional quality and student outcomes. Relationships across countries, cohorts and time. *IEA Research for Education,* Volume 2. 2016. 166 p. ISBN 978-3-319-41251-1.
7. OECD Skills Matter: Additional Results from the Survery of Adult skills. OECD Publishing. Pari, 2019. 130 p. ISBN 978-92-64-60466-7.
8. ZAPOROZHCHENKO, T.; DUTKO, O.; OPACHKO, M. Developing Competences in Future Primary School Teachers under the Conditions of Teacher Education Standardization: A Theoretical Review. In: *Revista Românească pentru Educaţie Multidimensională*, Volume 14, 2022. pp. 407-433. ISSN: 2066-7329.
9. https://drive.google.com/file/d/1rlxtuUninwyEaTVFuutbXKkWAlt8l3XS/edit
10. https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/index.html

© Hajdeu Mihaela, 2022

CZU: 37.016:51

CONSIDERAŢIUNI PRIVIND METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

Serghei MAFTEA
Academia „Ștefan cel Mare" a MAI
e-mail: psuplimentar@gmail.com

Rezumat. Articolul tratează unele aspecte ale metodei inducției matematice, relevând importanța studierii tematicii respective în cadrul orelor de matematică. Sunt evidențiate prin exemplificări situații de aplicare eronată a metodei respective. De asemenea, este abordată și relația dintre conceptele de deducție și inducție în vederea stabilirii atât a originii acestora prin prisma procesului de cunoaștere, cât și a delimitării dintre acestea. O altă problemă discutată se referă la formularea principiului inducției matematice și la aplicarea respectivei metode prin evidențierea respectării algoritmului aferent.
Cuvinte-cheie: Inducție, deducție, principiul, demonstrație, raționament, metoda.

Abstract. The article deals with some aspects of the method of mathematical induction, highlighting the importance of studying the respective subject within the mathematics classes. Examples of situations of misapplication of the respective method are highlighted by examples. Also, the relation between the concepts of deduction and induction is approached in order to establish both their origin through the prism of the knowledge process, as well as the delimitation between them. Another problem discussed concerns the formulation of the principle of mathematical induction and the application of the respective method by highlighting the observance of the related algorithm.
Keywords: Induction, deduction, principle, demonstration, reasoning, method.

Introducere

Necesitatea asocierii curriculumului național la matematică cu fundamentele cunoașterii matematice reprezintă un obiectiv central în vederea dezvoltării științei în Republica Moldova. Acest aspect, din perspective normative și reglatorii, ține și de racordarea curriculumului la cerințele Codului Educației al Republicii Moldova. Astfel, Conform Articolului 30, care specifică Misiunea învățământului liceal, se configurează faptul că învățământul liceal asigură dezvoltarea la elevi a competențelor definite prin Curriculum [1].

Un aspect esențial ce vizează disciplina matematica, pentru elevii din clasele liceale, este axat pe predarea unor subiecte cu impact în formarea și dezvoltarea unui sistem de competențe matematice, care contribuie la conexiunea individului cu subiecte din exteriorul domeniului matematica. Un astfel de subiect, care trebuie să beneficieze de o atenție mai accentuată, este metoda inducției matematice, cel puțin prin prisma faptului că încă este prea rar discutată din punct de vedere didactic [2]. Din perspectiva includerii acestui subiect, în curriculumul național, prin intermediul unității de conținut *Metoda inducției matematice. Aplicații la demonstrația unor identități numeric*, se observă că acesta se aliniază și la principiul care prevede că învățământul liceal ar trebui să propună o diversificare mai amplă a studierii matematicii. Ținem să specificăm că relevanța cercetări

© Maftea Serghei, 2022

și aplicării metodei inducției matematice a fost și în atenția marilor matematicieni printre care se remarcă A. Poincaré conform căruia, inducția matematică este „raționamentul matematic prin excelență”. Ca punct de start în folosirea sintagmei „inducție matematică” este considerat articolul „Induction (Mathematics)” al lui Augustus De Morgan [3], chiar dacă elemente ale inducției matematice erau aplicate și anterior, drept exemplu fiind demonstrația euclidiană a infinității numerelor prime [4].

Cu referire la predarea-învățarea subiectului pus în discuție se pot contura mai multe situații, care ar trebui să beneficieze de o analiză mai profundă. Astfel, mulți dintre elevi tind să specifice că metoda discutată prezintă careva dificultăți în procesul aplicării. Această situație fiind probabil generată de anumite confuzii care pot apărea în timp ce este abordată tematica respectivă. De asemenea se poate observa că procentajul numărului de elevi care înțeleg și aplică cu adevărat conceptul de inducție matematică nu este foarte mare. În acest context, este clar de ce apare discuția cu privire la faptul că există destui elevi și părinți nemulțumiți de tematica referitoare la inducția matematică. Cu toate acestea, în cunoștința mea, pare să nu existe un raport sistematic, la nivel național, cu privire la predarea inducției matematice, problemelor generate de acest subiect, a problemelor mai profunde implicate sau a modului de tratare în manuale. Acest articol își propune să completeze, într-o careva măsură, aceste aspecte.

Focusarea atenției pe tematica inducției matematice nu este generată doar de situațiile expuse, dar și de considerentele filosofice ale cunoașterii care stau la baza principiilor de inducție și deducție. De asemenea, se dorește de a confirma, încă o dată, rolul pe care îl are această tematică asupra dezvoltării spiritului de cercetare, perspicacității matematice pe care o poate reliefa chiar și elevul cu un bagaj minim de cunoștințe. Spectrul de aplicare a metodei inducției matematice este impunător cuprinzând practic toate compartimentele matematicii. Cultivarea aspectelor teoretico-practice ale matematicii în rândul elevilor din clasele liceale prin intermediul metodei inducției matematice fiind incontestabilă.

Rezultate obținute și discuții

Deducție vs inducție

Termenul „inducția” a fost folosit din antichitate, fiind prezent în lucrările lui Socrate și Aristotel [5-7]. Sensul pus de aceștia era diferit, de exemplu, de cel impus de F. Bacon[8], considerat promotorul metodei inductive moderne. Înțelegerea de către elevi a naturii logice a raționamentului aplicat în matematică ar contribui la formarea de abilități ce prevăd asumarea de către aceștia a unor careva decizii, care sunt foarte variate.

Deducția are la bază ideea, că dacă ceva este adevărat pentru un grup de lucruri, atunci este adevărat pentru oricare element al acestui grup, fiind una dintre cele două forme principale ale raționamentului logic. Astfel, deducția se aliniază printre opțiunile raționamentului logic fiind direcționată de la general spre particular(Dacă A = B și B = C,

© Maftea Serghei, 2022

atunci A = C). Cu referire la matematicieni care au folosit deducția se poate menționa, R. Descartes [9], care pricepea deducția ca o modalitate intuitivă de obținere a informațiilor, care ca urmare a unei reflecții îndelungate, duce în mod necesar la singura versiune corectă și G. Leibnitz [10], care judeca că deducția este singura cale de a obține cunoștințe adevărate.

Opusul raționamentului deductiv îl reprezintă raționamentul inductiv sau inducția. Aceasta reprezintă o metodă de a construi o concluzie logică bazată pe principiul: *de la particular la general*, adică se cercetează fiecare caz, fapt ce permite să se ajungă la ipoteze pentru un caz general. În știință, se disting două tipuri ale raționamentului inductiv: inducția completă și inducția incompletă. Inducția completă presupune că, toate obiectele din grup sunt supuse, rând pe rând, raționamentului logic, spre deosebire de cazul inducției incomplete, în cazul căreia sunt examinate doar careva elemente ale grupului și, pe baza rezultatului, se face o presupunere cu privire la întregul grup. Astfel, distincția de bază a inducției incomplete este incapacitatea de a realiza o concluzie fiabilă. Având în vedere acest lucru, raționamentul inductiv incomplet poate conduce adesea la o concluzie eronată. Pentru a rezuma, putem spune că, folosirea inducției ca unică metodă de căutare a informației nu oferă o imagine obiectivă. Raționamentele inductiv și deductiv sunt direcții reciproc opuse în procesul de gândire, dar care nu se exclud reciproc, ci se completează în vederea evaluării concluziilor.

Principiul inducției matematice

Principiul inducției matematice este utilizat în matematică atunci când este implicată formularea de rezultate sau enunțuri în termeni care conțin „*n*”, care este un număr natural [11]. Pentru a demonstra principiul de bază susținut de „*n*” se folosește un set de criterii bine stabilite și adaptate într-un format specific. Tehnicile utilizate pentru a demonstra afirmațiile cu privire la „*n*” sunt cunoscute ca principii ale inducției matematice. Prezentarea principiului inducției matematice poate multiaspectuală. Astfel, acesta poate fi expus în maniera în care atenția se va concentra pe termeni ce-l descriu ca mulțimea de numere naturale cu o anumită proprietate. Mai uzual, însă, principiul pus în discuție este expus de termeni care subliniază proprietea numerelor naturale. Dintre aceste două forme, oarecum similare, cea din urmă pare preferabilă nu numai din considerente de simplitate, dar și de faptul că setul de numere naturale care satisface o proprietate dată este secundar proprietății respective. Un alt aspect, ce se referă la modalitatea abordării principiului inducției matematice, vizează alegerea primului număr pe care să se bazeze inducția. Atât „0”, care este numărul natural *0*, cât și „1”, care este un număr natural *1*, sunt utilizate frecvent. De fapt, orice număr întreg, pozitiv sau negativ poate servi ca punct de start într-o demonstrație de tip inductiv, în anumite circumstanțe. De exemplu, $2^n > n^2$ este adevărat pentru $n \geq 5$, dar nu este adevărat pentru $n=2, 3$ *și* 4. Ținând cont de cele expuse, principiul

© Maftea Serghei, 2022

discutat, poate fi vom prezenta în felul următor: ***Principiul inducției matematice:*** *Dacă* ***1*** *are proprietatea* ***P*** *și dacă* ***n*** *având proprietatea* ***P*** *implică, că* ***n+1*** *are de asemenea proprietatea* ***P****, atunci fiecare* ***n*** *are proprietatea* ***P****.*

Această formulare implică că valorile variabilei ***n*** variază pe mulțimea numerelor naturale nenule (luate pentru a începe cu 1), iar **P** este o proprietate fixă, dar arbitrară, a numerelor naturale. Principiul poate fi exprimat și mai pe scurt: *Dacă* ***P(1)*** *și dacă pentru orice* ***n****,* ***P(n)*** *implică* ***P(n + 1)****, atunci pentru toți* ***n****,* ***P (n)****.* Ambele forme ale p*rincipiului inducției matematice* sunt exprimate informal, așa cum este și cazul.

Relevanța metodei inducției matematice din punct de vedere educațional

După cum se cunoaște, premisa și deducerea unei concluzii formează baza raționamentului. Raționamentul, la rândul său, duce la inducții mai bune. Drept exemplificare la cele expuse se propune următorul model:

$$1 = 1^2 = 1;\ 4 = 2^2 = 1 + 3;\ 9 = 3^2 = 1 + 3 + 5;\ 16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7;\ 25 = 5^2 = \\ = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$$

Având la bază doar observația se poate ajunge la ipoteza că:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Exemplul prezentat, din punct de vedere didactic, scoate în prim plan ambiguitatea pe care cuvântul „inducție” îl impune între metoda euristică de a promova o ipoteză (pornind de la un număr finit de exemple) și forma riguroasă matematică a demonstrației deductive (care implică capacitatea de a compune lanțuri logice în care din primul urmează al doilea ș.a.m.d.). Acest exemplu, evidențiază clar și relevanța educațională a inducției matematice prin proprietățile sale esențiale, care sunt reprezentate de faptul că ea permite să se obțină o mai bună înțelegere și asimilare a teoremelor și exemplelor, de a studia noi caracteristici și desigur de a obține din cazuri particulare a unei caracteristici comune.

Erori de aplicare a metodei inducției matematice

Efectuarea unei analogii nu reprezintă o metodă veritabilă de demonstrație, dar oferă posibilitatea de a investiga caracteristici comune ale părților constitutive ale unui grup. Pentru a obține un rezultat fiabil, este necesar să existe un număr suficient de exemple diverse pentru a reprezenta întregul grup de elemente. Având în vedere acest lucru, raționamentul inductiv poate conduce la o concluzie eronată. În acest sens *Principiul inducției matematice* prin respectarea strictă a procesului, care demarează de la cel mai mic număr și ca urmare a gândirii logice se ajunge la nivel superior, tinde să elimine cu succes sincopele aferente. Astfel, pentru aplicarea corectă a metodei inducției matematice și afirmării că propoziția este considerată demonstrată pentru orice valoare naturală ***n***, este necesar de a parcurge succesiv următoarele etape:

1. *Se verifică, inițial, veridicitatea pentru o valoare inițială a lui* ***n (n = 1)***;

© Maftea Serghei, 2022

2. *Se presupune că pentru orice valoare naturală* ***n*** *afirmația este adevărată;*
3. *Să se demonstreze propoziția pentru* ***n+1.***

Raționament eronat la prima etapă. *Să se demonstreze prin inducție că numerele naturale adiacente sunt egale.* Cu alte cuvinte, propoziția care trebuie demonstrată prin inducție este $P(n)$: $n = n + 1$. Dacă demonstrația demarează de la presupunerea că propoziția este adevărată pentru toate valorile mai mici decât un careva număr natural n atunci ea este veridică și pentru $n - 1$, deci $P(n-1)$: $(n - 1) = (n - 1) + 1$, adică $n - 1 = n$. Se observă că, la adunarea unității în ambele părți ale ultimei relații, se obține că $n = n + 1$.

Raționament eronat la a doua etapă. *Să se demonstreze prin inducție că orice* n *numere sunt egale.* Adică dacă $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere arbitrare, atunci $a_1=a_2=\ldots=a_n$. (De regulă, se propun propoziții similare cu: *să se demonstreze că orice* n *copii au aceiași culoare a ochilor*.) Se constată simplu că, pentru $n = 1$ nu există ceva ce ar trebui de demonstrat, deoarece se folosește doar un singur număr și evident că acesta este egal cu el însuși. Dacă la acest moment intervine etapă demonstrației că orice $n+1$ numere sunt egale, admițând (așa cum se face de obicei în cazul principiului inducției matematice) că pentru un număr mai mic, aceasta propoziție este veridică, atunci se pot consideră numerele arbitrare $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Se observă că prin renunțarea la ultimul număr din acest șir, se obține un set de n numere, care conform presupunerii sunt egale: $a_1=a_2=\ldots=a_n$., iar prin renunțarea la primul număr se obține un set de numere n și conform ipotezei urmează că $a_2=a_3=\ldots=a_{n+1}$. Combinând aceste două șiruri de egalități, se obține ceea ce se dorea de demonstrat, adică $a_1=a_2=\ldots=a_n=a_{n+1}$.

Raționament eronat la a treia etapă. *Să se demonstreze că orice* n *puncte ale spațiului se află pe o dreaptă.* Pentru $n=1$ și $n=2$, acest lucru este adevărat (conform axiomei corespunzătoare din geometrie[10]). Prin presupunerea că propoziția $P(n)$ este adevărată urmează să se demonstreze că acest lucru este valid și pentru $P(n+1)$. În acest sen se consideră $n+1$ puncte arbitrare $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Renunțând la ultimul punct din acest șir și aplicând ipoteza se obține că punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se află pe o careva dreaptă l_1 iar prin renunțarea la primul punct al șirului se obține că punctele $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ se află pe o careva dreaptă l_2. Conform axiomei, care afirmă că oricare ar fi două puncte distincte există cel mult o dreaptă care trece prin aceste puncte urmează că dreptele l_1 și l_2 coincid.

Concluzii

În consecință se conturează explicit atât complexitatea, cât și importanța tematicii ce se referă la principiul inducției matematice. Aceasta situație se poate evidenția prin formularea principiului inducției matematice completată de abilitatea de a manipula cu tehnicile implicate în aplicarea inducției matematice și desigur respectarea ordinii

© Maftea Serghei, 2022

algoritmului impus de metoda respectivă. Pe acest fundal, de asemenea ar trebuie să se reflecteze atât asupra persistenței tematicii respective în curriculumul de liceu, cât și asupra majorării numărului ore ce necesită a fi atribuit abordării subiectului ce se referă la înțelegerea și aplicarea metodei inducției matematice.

Bibliografie

1. Codul Educației al Republicii Moldova, nr. 152 din 17.07.2014. În: Monitorul Oficial al Republicii al Moldova, 2014, nr. 319-324.
2. MAFTEA, S. Aspecte privind metoda inducției matematice. În: *Făclia*, nr.41 (3677), vineri, 5 noiembrie, 2021. p.7.
3. https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Morgan.html.
4. IOAN, C. A. Teoria numerelor prime. Artă și Știință. În: Euro Economica, nr.9. p.59-63. Disponibil online: https://www.researchgate.net/publication/234023515_Teoria_numerelor_prime_-_arta_si_stiinta
5. http://www.sno.pro1.ru/lib/nersesyanz/ners.pdf.
6. https://klex.ru/m6k.
7. https://www.eduspb.com/public/books/byograf/litvinova.aristotel._ego_zhizn_nauchnaya_i_filosofskaya_deyatelnost.pdf. Accesat la 6.08.2019.
8. https://www.gutenberg.org/files/45988/45988-h/45988-h.htm.
9. https://www.iep.utm.edu/desc-sci/.
10. https://seop.illc.uva.nl/entries/scientific-method/.
11. ACHIRI, A.; CIBOTARENCO, E.; GAIDARGI, Gh.; SOLOMON, N.; TURCALOV, Z. *Metodica predării matematice*. Volumul I. Chișinău, 1992.

© Maftea Serghei, 2022

CZU: 37.016:004

USING OF GITHUB CLASSROOM TOOLS IN PROGRAMMING CLASSES

Vasyl MELNYK, Halyna MELNYK
Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
e-mail: windchange7@gmail.com, g.melnik@chnu.edu.ua

The transition to remote education poses new challenges for programming teachers. In the conditions of real classrooms, it was possible to check the solution of problems, correct the code or give recommendations during laboratory work. When switching to distance learning, the teacher is forced to look for other approaches. It opens the possibilities of various platforms: Google Classroom, LMS (Moodle), sending solutions via e-mail, etc. But in each of these cases, we need to use additional resources: download students' works to a local computer or open them in a repository; comment the code; send to the student and expect a response. These actions require time and additional effort.

A slightly different tool is presented in abstract. It combines the capabilities of the version control system and the educational platform — GitHub Classroom [1]. It makes possible not only to assign a task but check it directly using the platform as well. Below we provide the main stages of working with the platform:

1) create an account and organization for the teacher;
2) within the organization, create a repository and upload the so-called "starter code" to it (these might be files with tasks and tests that will check students' solutions);
3) create a classroom in which assigned tasks will be placed;
4) define a class (group) and add students. GitHub Classroom has full integration with LMS Moodle and Google Classroom for this action;
5) create and assign a task, specifying a repository with source starter code and tests for it. The assignment includes a grade's rules and a deadline. The task can be both individual and designed for a team.

By clicking on the task link students get access to the repository created for them. The work is done within this repository. With the next submission of accomplished tasks, they are automatically checked with tests. Both the student and the teacher are informed about the results.

Of course, if it's needed to teach how to develop algorithms at the beginning of learning programming, the work of the teacher will not be limited to the GitHub classroom. However, GitHub Classroom greatly facilitates and optimizes the teacher's time already at the stage of learning various technologies and programming languages.

Bibliography

1. https://docs.github.com/en/education

© Melnyk Vasyl, Melnyk Halyna, 2022

CZU: 371.388:004

SOLUȚIE SOFTWARE GRATUITĂ PENTRU PRELUCRAREA STATISTICĂ A REZULTATELOR EXPERIMENTULUI PSIHOPEDAGOGIC

Dorin PAVEL
Angela GLOBA
Maria PAVEL
Catedra de Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: paveldorin@gmail.com, angelagloba@gmail.com, pruteanupavel@gmail.com

Rezumat. În lucrare se descrie aplicația PSPP, cu licență GNU, destinată prelucrării statistice a datelor și se scot în evidență avantajele și dezavantajele acesteia în comparație cu aplicația specializată SPSS, cu licență IBM. PSPP este o soluție gratuită, ce poate fi utilizată de studenții masteranzi, doctoranzi, cercetători în domeniul științelor educației, pentru prelucrarea datele colectate în urma experimentului psihopedagogic.
Cuvinte cheie: experiment pedagogic, prelucrare statistică a datelor, statistica descriptivă, statistica inferențială, test statistic parametric, test statistic neparametric.

Abstract. The paper describes the GNU-licensed PSPP application for statistical data processing and highlights its advantages and disadvantages compared to the specialized IBM-licensed SPSS application. PSPP is a free solution that can be used by master's students, doctoral students, researchers in the field of educational sciences, to process the data collected following the psychopedagogical experiment.
Keywords: pedagogical experiment, statistical data processing, descriptive statistics, inferential statistics, parametric statistical test, non-parametric statistical test.

Introducere

Pentru a da răspuns la întrebările care apar vis-a-vis de variabilele fenomenului educațional, cercetarea pedagogică apelează deseori la metoda experimentului, care furnizează date obiective și exacte. Obiectivitatea și veridicitatea cercetărilor din domeniul științelor educației este asigurată de semnificația testelor statistice parametrice și neparametrice aplicate asupra variabilelor cercetării, ale căror valori sunt obținute în urma desfășurării experimentului pedagogic. Mijloacele tehnice moderne, îndeosebi cele informatice permit eficientizarea procesului de analiză statistică a datelor. În acest scop pot fi utilizate așa aplicații ca: Excel, SPSS, PSPP etc.

Funcțiile statistice din biblioteca Excel sunt un instrument puternic ce permit obținerea indicatorilor statistici importanți și a valorilor criteriilor statistice cele mai des utilizate. Însă implementarea în practică a acestora, necesită competențe digitale dezvoltate la un nivel înalt din partea cercetătorului, care ar permite identificarea funcției potrivite (numele funcțiilor nu sunt tocmai explicite), indicarea corectă a argumentelor ei și implementarea facilităților Excel pentru construirea și completarea tabelelor cu rezultatele obținute.

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

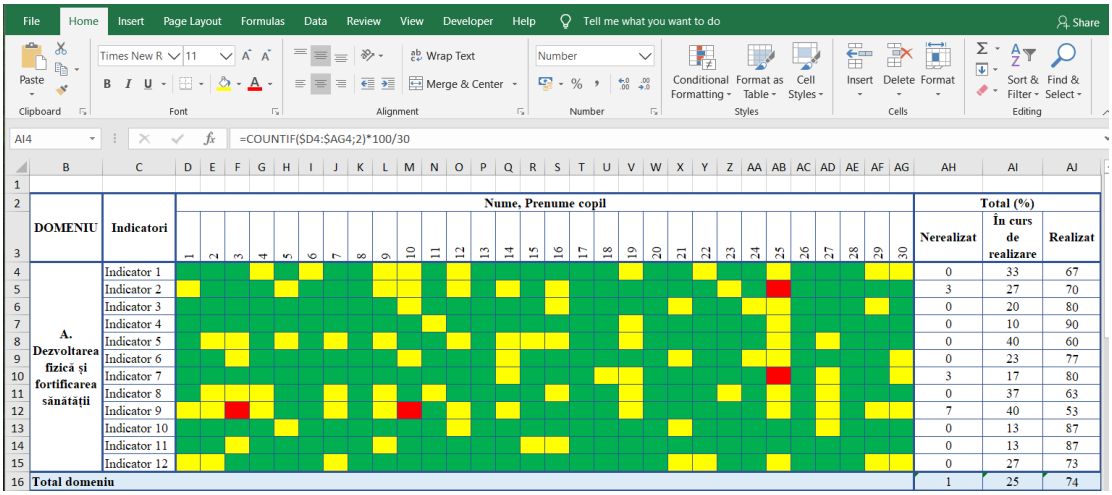


Figura 1. Calcule statistice în Excel

Aplicația dedicată pentru prelucrarea statistică a datelor din domeniul științelor sociale SPSS, sub licența IBM, este cea mai utilizată în acest domeniu, conține o interfață prietenoasă utilizatorului și este dotată cu un set bogat de facilități pentru calcule atât din statistica descriptivă, cât și cea inferențială. Marele dezavantaj al acestei aplicații este că licența SPSS este foarte costisitoare, iar în condițiile țării noastre un cercetător nu întotdeauna poate să-și permită asemenea cheltuieli.

În acest context, soluția vine din partea software-ului liber cu licență gratuită, cum ar fi GNU și anume cu softul specializat PSPP.

Licența Publică Generală GNU și PSPP

GNU este un acronim recursiv pentru „GNU's Not Unix!”, deoarece GNU este precum UNIX (Unix-Like), ca și design și arhitectură, dar complet diferit, aceasta fiind un soft liber și nu conține nici un cod Unix.

Licența Publică Generală GNU (în engleză: GNU General Public License, prescurtat GNU GPL) este o licență software a Fundației pentru Software Liber. Scopul licenței este de a da dreptul oricărui utilizator de a copia, modifica și redistribui programe și coduri sursă ale programatorilor care își licențiază operele sub tutela GPL. GNU GPL este una dintre cele mai utilizate licențe software.

PSPP reprezintă un soft specializat de analiză statistică a datelor organizate pe eșantioane, care citește datele, le analizează conform comenzilor furnizate și afișează rezultatele într-un fișier de ieșire standard sau într-o fereastră grafică de afișare. Limbajul acceptat de PSPP este similar cu cel acceptat de produsele statistice SPSS. PSPP permite crearea de tabele și diagrame rezultante, în mai multe formate: ASCII, PostScript, PDF, HTML și DocBook.

PSPP este o aplicație stabilă și solidă, care poate efectua statistici descriptive, teste T, ANOVA, teste de asociere, teste neparametrice și altele.

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

Versiunea actuală a PSPP, 1.4.1, totuși este incompletă în ceea ce privește procedurile statistice pe care le suportă, deoarece aplicația este în curs de dezvoltare. Autorii speră să sprijine pe deplin toate funcțiile necesare în PSPP.

Caracteristici PSPP

Aplicația PSPP permite prelucrarea a peste 1 miliard de unități statistice și suportă peste 1 miliard de variabile statistice. Are sintaxă și fișiere de date care sunt compatibile cu cele ale SPSS. Permite utilizatorului alegerea mediului de lucru: la terminal sau prin intermediul interfeței grafice PSPPIRE. Susține o gamă de formate de ieșire: text, postscript, pdf, opendocument sau html.

De asemenea, softul PSPP permite interoperarea cu aplicațiile Gnumeric, LibreOffice, OpenOffice.Org și alte programe gratuite. La fel ca și SPSS, permite ușor importul de date din foi de calcul, fișiere text și surse de baze de date. Deschide, analizează și editează două sau mai multe seturi de date simultan, care pot fi, de asemenea, fuzionate, unite sau concatenate.

Interfața utilizatorului acceptă toate seturile de caractere comune și a fost tradusă în mai multe limbi. Conține proceduri statistice rapide, chiar și pe seturi de date foarte mari. Printre avantajele acestei aplicații se poate enumera [1]:

- nu solicită taxe de licență;
- nu are perioadă de expirare;
- nu solicită „acorduri de licență pentru utilizatorul final” lipsite de etică;
- oferă un manual de utilizare complet indexat;
- oferă libertate asigurată; este licențiat conform GPLv3 sau o versiune mai nouă;
- este portabil; rulează pe multe computere diferite și multe sisteme de operare diferite (GNU sau GNU/Linux sunt platformele preferate, dar funcționează bine și pe alte sisteme, inclusiv Windows).

Descărcare și instalare PSPP

Ca și în cazul majorității software-ului GNU, PSPP poate fi găsit pe serverul principal GNU ftp [2]:

- https://www.gnu.org/software/pspp/get.html (prin HTTP) și
- https://ftp.gnu.org/gnu/pspp/ (prin FTP).

După cum se vede în figura 2, sistemul permite selectarea versiunii de aplicație PSPP ce trebuie descărcată, în conformitate cu sistemul de operare utilizat: GNU/Linux, Windows, MacOS.

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

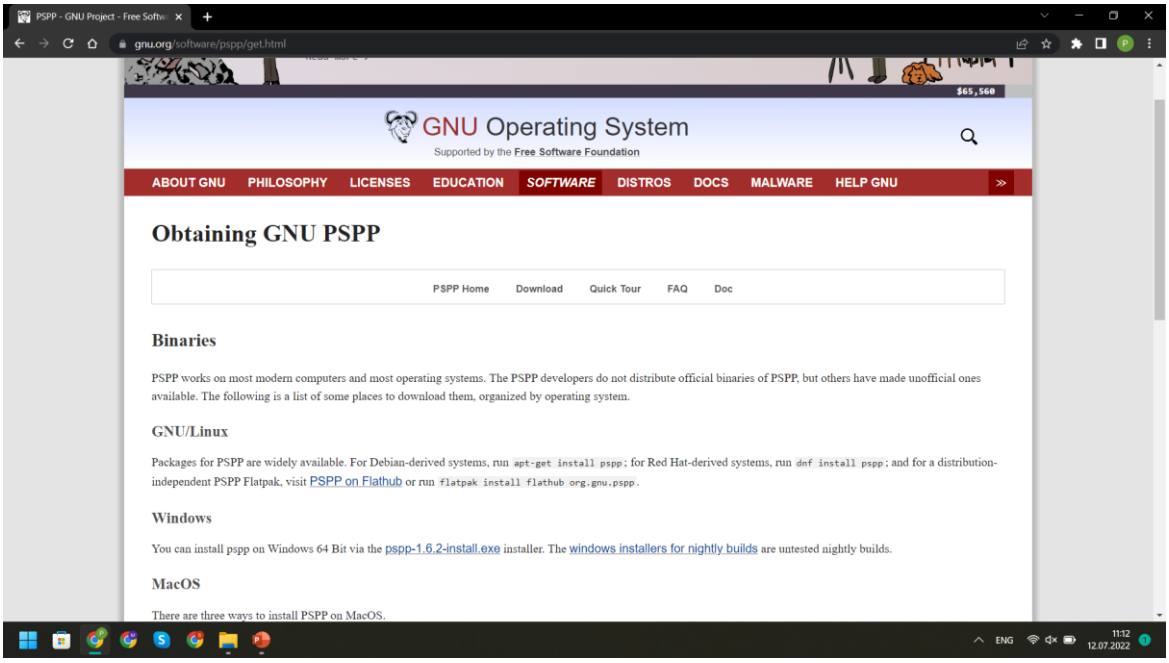
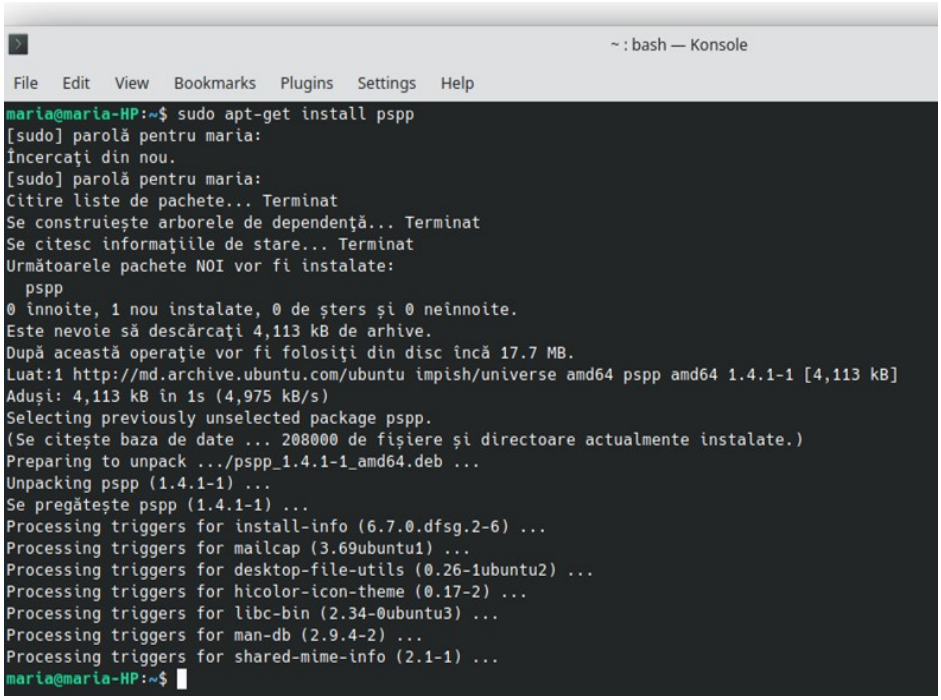


Figura 2. Serverul principal GNU, pagina pentru obținerea GNU PSPP

Majoritatea sistemelor de operare moderne vin cu PSPP pre-compilat, în deosebi cele din familia Linux. Pentru a-l instala pe o distributivă Linux, se tastează în linia de comandă:

- ✓ `apt-get install pspp`, pentru sisteme derivate Debian; sau
- ✓ `yum install pspp`, pentru sisteme derivate Red Hat.

În figura 3 se ilustrează procesul de instalare a aplicației în una din distributivele Linux, utilizând prima opțiune dintre comenzile de mai sus. O dată instalată, aplicația PSPP poate fi deschisă din pachetul Science and Math din Aplicații.



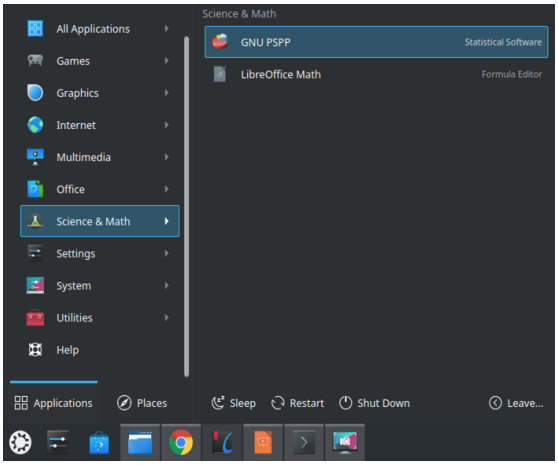


Figura 3. Instalarea și deschiderea aplicației PSPP în Linux

Pentru instalarea aplicației PSPP în Windows, se urmează pașii sugerați în figura 4.

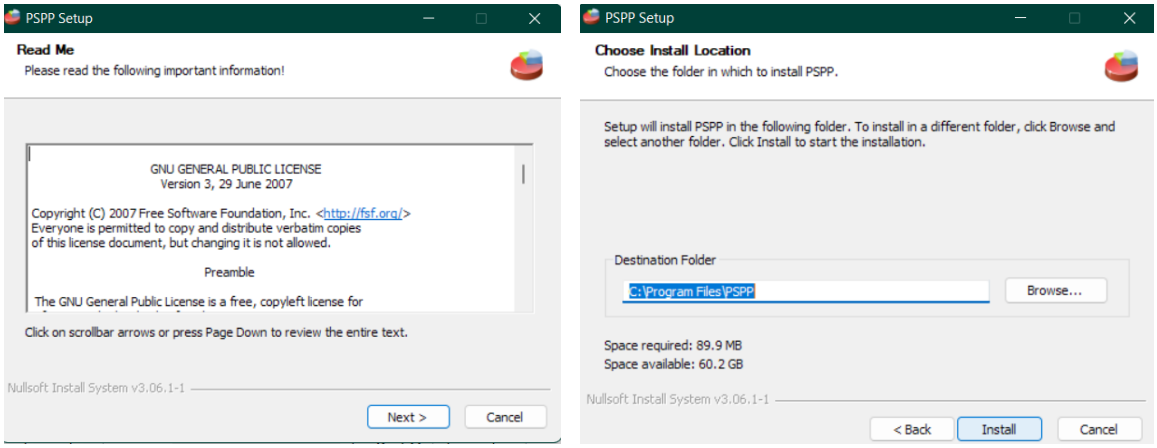


Figura 4. Instalarea și deschiderea aplicației PSPP în Windows

Interfața grafică PSPPIRE

Așa cum s-a menționat anterior, se pot accesa toate instrumentele aplicației PSPP în linia de comandă, însă pentru a facilita operarea cu aceste instrumente și comenzi disponibile, se recomandă cercetătorilor utilizarea interfeței grafice PSPPIRE.

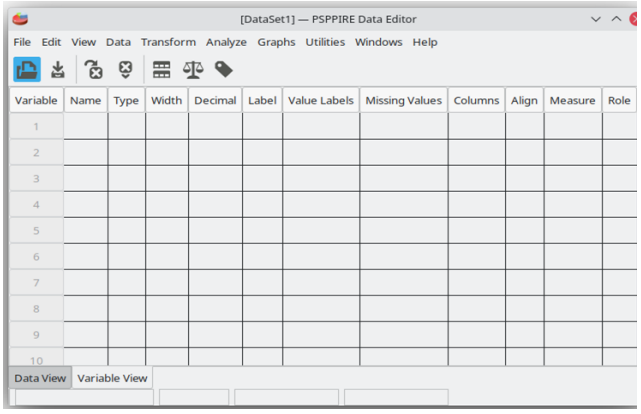


Figura 5. Interfața grafică PSPPIRE

Exact ca și în cazul SPSS, aplicație permite lucrul cu variabilele, acestea fiind descrise în pagina Variable View, cât și lucrul cu valorile acestora în pagina Data View. Similaritatea descrierii valorilor fiecărei variabile calitative este sesizată în figura 6.

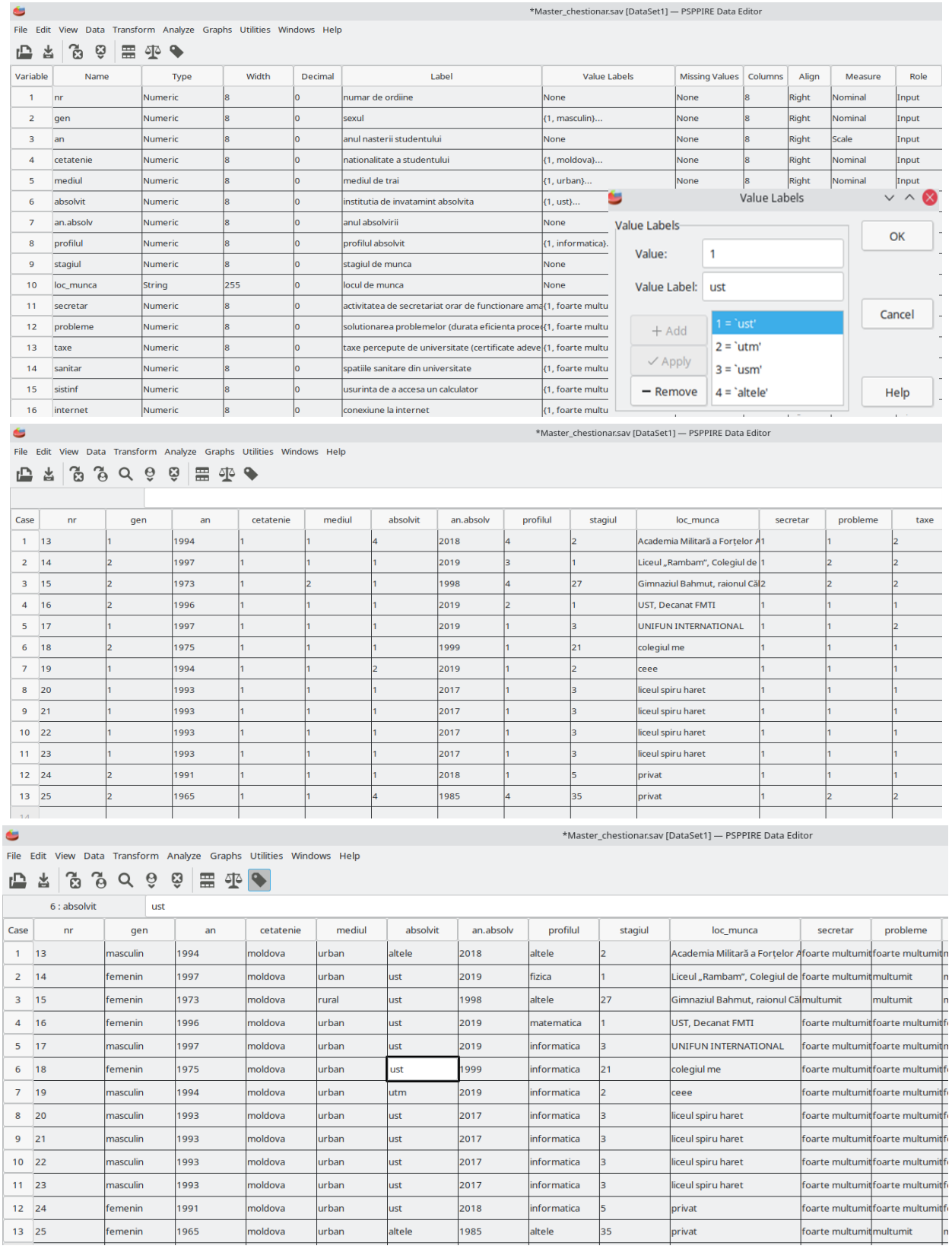


Figura 6. Descrierea variabilelor, valorilor acestora și a datelor în PSPPIRE

Softul permite vizualizarea datelor, atât sub formă cantitativă, cât și calitativă, accesând comanda View →Value Labels.

Statistica descriptivă

Statistica descriptivă permite obținerea unor indicatori ca media, mediana, modul, minim, maxim, varianța, abaterea standard, eroarea standard etc. și prezentarea lor așa cum sunt [3, 4]. Calea de execuție pentru calculului acestora este: Analyze → Descriptive Statistics → Frequencies. După cum se poate observa, meniurile și comenzile accesate sunt foarte similare cu cele din SPSS, acest lucru fiind un avantaj atât pentru profesorii, cât și pentru studenții ce studiază un curs dedicat prelucrării statistice a datelor din domeniul psihopedagogic, deoarece facilitează dezvoltarea competențelor de lucru cu oricare dintre softurile menționate: PSPP sau SPSS.

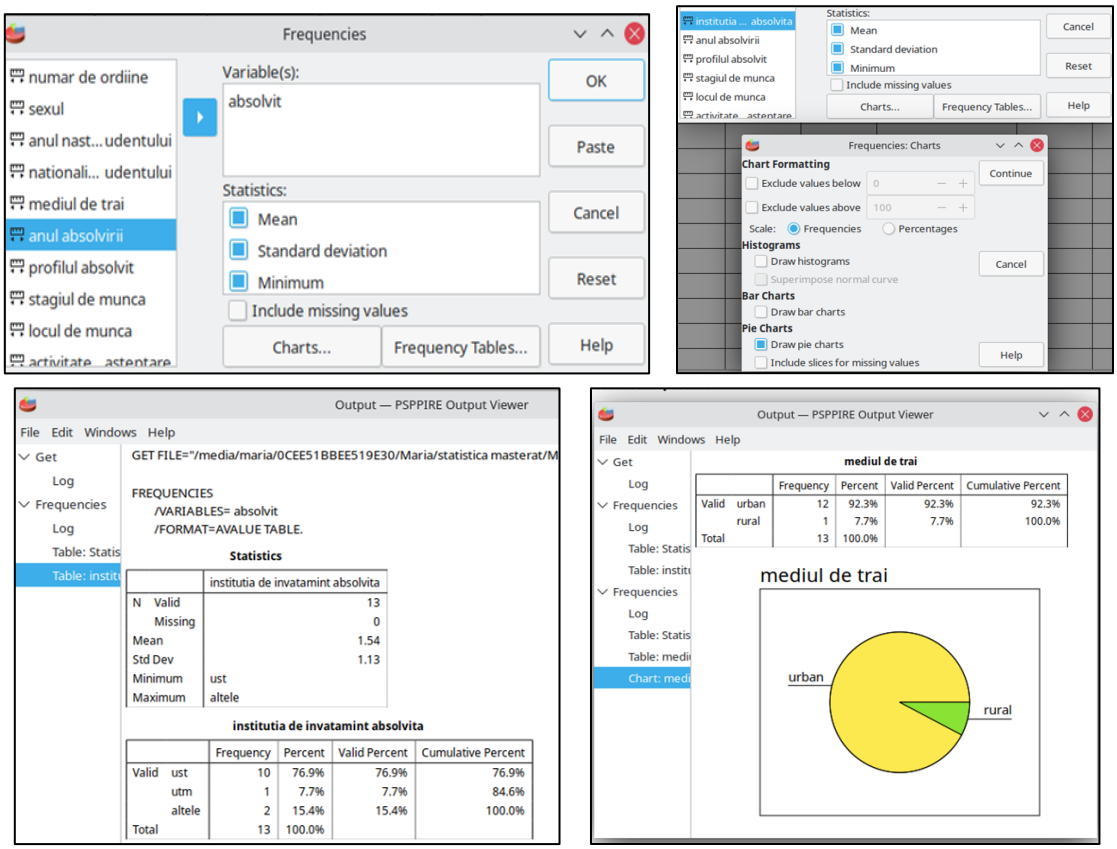


Figura 7. Statistica descriptivă în PSPP: indicatori statistici, tabele, diagrame

După cum se vede în figura 7, rezultatele obținute sunt afișate într-un fișier de ieșire (Output), iar preluarea tabelelor și diagramelor se face prin selectarea acestora și executarea comenzii Edit→Copy, sau prin click dreapta și accesarea comenzii Copy. Obiectele copiate sunt inserate sub formă de imagini, ceea ce nu permite editarea lor în acest format, acesta fiind un dezavantaj al aplicației.

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

Statistica inferențială

Statistica inferențială se referă la formularea unor concluzii privind semnificația diferențelor dintre mediile unor variabile cercetate, ceea ce permite confirmarea sau infirmarea unor ipoteze statistice pe baza diferitor criterii parametrice sau neparametrice [3, 4]. Cele mai aplicate teste parametrice sunt testele t (criteriul Student), acestea fiind disponibile și în PSPP în toate versiunile sale: pentru un eșantion, pentru eșantioane independente, pentru eșantioane perechi. De exemplu, pentru a executa testul t pentru eșantioane independente, în PSPP se urmează aceleiași comandă ca și în SPSS: Analyze → Compare Means → Independent-Samples T Test (figura 8), iar rezultatele furnizate în fișierul de ieșire sunt prezentate similar, ceea ce permite interpretarea facilă a acestora.

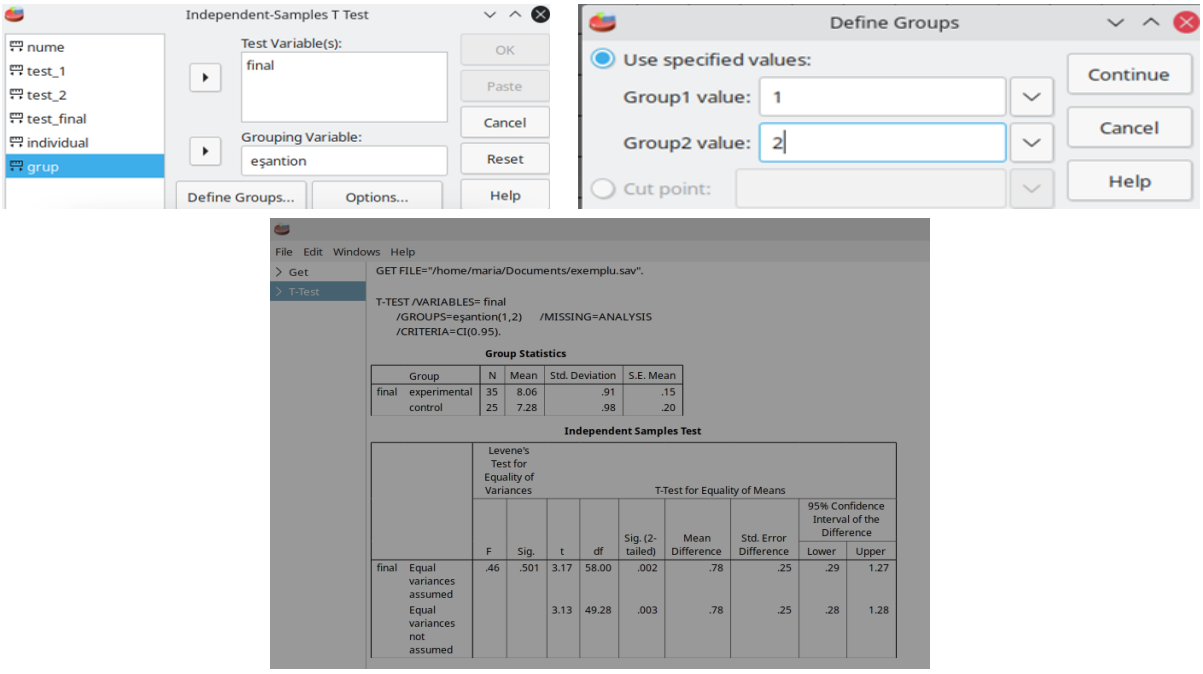


Figura 8. Statistica inferențială: testul t pentru eșantioane independente

Testele neparametrice, care se bazează pe compararea de medii utilizând rangurile și se execută în cazul când variabila cercetată este calitativă, ordinală și nu este normal distribuită, pot fi implementate în PSPP și anume: testul binomial de verificare a egalității unei proporții cu o valoare specificată, testul χ^2 de comparare a unui set de frecvențe observate cu un set de frecvențe teoretice, testul Wilcoxon pentru eșantioane perechi, testul Kolmogorov-Smirnov, testul pentru k eșantioane perechi și testul pentru k eșantioane independente [5]. De exemplu, pentru a compara mediile a k eșantioane independente (pentru 2 eșantioane: testul Mann-Whitney), se va executa Analyze →Non-Parametric Statistics →K Independent-Samples. Datele furnizate în fișierul de ieșire sunt concentrate în bine cunoscutele tabele Ranks și Test Statistics (figura 9).

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

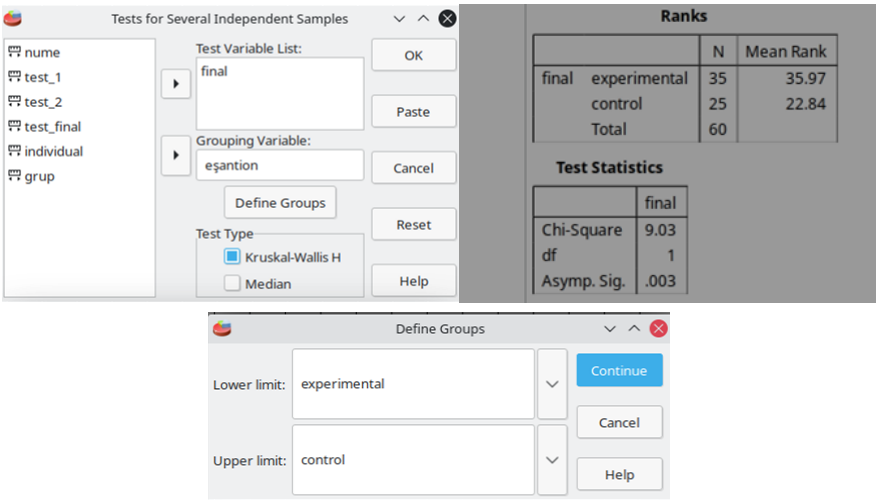


Figura 9. Testul neparametric pentru k eșantioane independente în PSPP

În afară de aceste proceduri, aplicația PSPP permite și verificarea normalității unei variabile, și executarea analizei corelaționale dar și un șir de alte operații necesare în prelucrarea statistică și prezentarea rezultatelor.

PSPP propune un manual de utilizare bogat și indexat care ajută la formarea abilităților de gestionare a aplicației, dar și un set de recomandări de facilitare a lucrului în acest mediu, pentru a încuraja utilizatorii să-l acceseze, așa ca:

- pentru a facilita conversia variabilelor string în variabile codificate numeric, se recomandă utilizarea opțiunii Automatic Recode, care păstrează numele variabilelor ca etichete;
- pentru navigarea prin seturi mari de date, se poate de utilizat comanda Windows → Split care permite vizualizarea concomitent a ambelor capete în aceeași panoramă;
- rapoartele obținute pot fi exportate în format ODT pentru a putea fi ușor editate în suita de aplicații Libreoffice.org, dar și în pachetul Microsoft Office;
- opțiunile din meniul Edit permit deschiderea automată a ferestrei de Output la generarea statisticilor;
- înregistrarea rapidă a variabilelor poate fi făcută prin tehnica drag-and-drop atât în Variable View, cât și în Data View;
- aplicația rulează cel mai bine pe o platformă GNU sau GNU/Linux și deoarece Windows nu este un sistem gratuit, unele caracteristici ale aplicației ar putea să nu funcționeze optimal;
- pentru a trece de la vizualizarea numelui variabilei la eticheta acesteia, se utilizează click dreapta;
- se recomandă utilizarea comenzii Paste în loc de OK atunci când se rulează diferite proceduri, pentru a permite editarea comenzilor înainte de executare și un control mai bun asupra procesului;
- pentru a importa direct o foaie de calcul se utilizează comanda File → Import Data.

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

Concluzii

Utilizarea unei sau altei aplicații de prelucrare statistică a datelor unui experiment pedagogic depinde de competențele digitale ale cercetătorului și de resursele tehnice ale acestuia. Cercetătorul poate să recurgă etapizat la diferite instrumente concomitent: la Excel pentru înregistrarea datelor, la platformele online de tipul Social Science Statistics [6], pentru a calcula mărimile diferitor criterii statistice. Acest model însă necesită însă competențe bine dezvoltate de analiză statistică și operarea cu ușurință cu datele obținute cât și interpretarea lor. Prin urmare recomandăm instalarea gratuită a aplicației PSPP, procedeu ce nu necesită eforturi deosebite din partea utilizatorului și utilizarea acesteia cu încredere pentru orice operație statistică, recurgund la necesitate și la manualul aplicației.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. https://www.gnu.org/software/pspp/tour.html
2. https://www.gnu.org/software/pspp/get.html
3. PAVEL, M. Prelucrarea statistică a informației psihopedagogice. În: *Materialele conferinţei ştiinţifico-didactice naționale cu participare internațională „Probleme actuale ale didacticii ştiinţelor reale", ediția a II-a, consacrată aniversării a 80-a a profesorului universitar Ilie Lupu.* 11-12 mai 2018. Chișinău: UST, 2018. Vol. I. ISBN 978-9975-76-238-0. p. 199-202.
4. PAVEL, M. Utilizarea aplicaţiei SPSS la prelucrarea datelor experimentale obţinute în cercetarea pedagogică privind impactul TIC asupra formării iniţiale a învăţătorilor. În: materialele conferinţei *Mathematics & Information Technologies: Research and Education* (MITRE-2015). Iulie 2-5. ISBN 978-9975-71-678-9. Chișinău, 2015. p.117.
5. LABĂR, A. V. *SPSS pentru Științele Educației. Metodologia analizei datelor în cercetarea pedagogică*. Iași: Polirom, 2008. 350 p. ISBN 978-973-46-1148-5.
6. https://www.socscistatistics.com/tests/

© Pavel Dorin, Globa Angela, Pavel Maria, 2022

CZU: 37.016:51+159.955

DEZVOLTAREA GÂNDIRII CRITICE PRIN UTILIZAREA CONTRAEXEMPLELOR ÎN PROCESUL DE STUDIERE A MATEMATICII

Larisa SALI
Felicia ANTON
Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: larisa.sali2018@gmail.com

Rezumat. În acest articol sunt analizate unele abordări teoretice cu privire la dezvoltarea gândirii elevilor în procesul educațional. În contextul formării abilităților de gândire critică prin educația matematică a fost examinat rolul contraexemplelor.
Cuvinte-cheie: Gândire, gândire critică, raționament, definiție, teoremă, contraexemplu, abilități matematice, competențe matematice.

Abstract. In this article, some theoretical approaches regarding the development of students' thinking in the educational process are analyzed. In the context of the formation of critical thinking skills through mathematics education, the role of counterexamples was examined.
Keywords: Thinking, critical thinking, reasoning, definition, theorem, counterexample, math skills, math competences.

Introducere

Programele educației matematice moderne vizează formarea la elevi de valori și atitudini precum: dezvoltarea unei gândiri deschise, creative și a unui spirit de obiectivitate, imparțialitate și toleranță; aprecierea rigorii, a ordinii și a eleganței în arhitectura rezolvării unei probleme, în aplicarea unei metode, a unui algoritm sau a construirii unei teorii; susținerea propriilor idei și puncte de vedere prin argumentare și/sau formulări de întrebări; cooperarea în calitate de membru al unui grup; angajarea în discuții critice și constructive asupra unui subiect matematic; adoptarea punctelor de vedere diferite și orientarea în vederea formării propriei viziuni etc. Sesizăm gândirea critică drept proces solicitat în toate sferele de activitate a elevilor. Când gândesc critic la matematică, ei iau decizii sau formulează judecăți motivate. Abilitățile care caracterizează un gânditor critic sunt multiple. Educația matematică creează fundamente pentru dezvoltarea gândirii critice în numeroase ipostaze. Un procedeu util în acest context s-a dovedit a fi orientarea elevilor spre asimilarea cunoștințelor și rezolvarea problemelor axându-se pe formularea și soluționarea de contraexemple.

1. Abordări teoretice cu privire la dezvoltarea gândirii elevilor în procesul educațional la matematică

Conceptul de gândire critică este considerat a fi de provenienţă filozofică și are origini la Francis Bacon, John Locke și alții. Folosirea termenului „gândire critică” pentru a

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

descrie un scop educațional datează de la filozoful american John Dewey (1910), care a numit-o „gândire reflexivă”. Aceasta constă în „*luarea în considerare activă, persistentă și atentă a oricărei credințe sau presupuse forme de cunoaștere în lumina temeiurilor care o susțin și a concluziilor ulterioare la care tinde*” [3,4]. Ulterior, numeroși autori au formulat diverse definiții pentru noțiunea respectivă.

Acțiunea logică de a defini o noțiune constă în evidențierea proprietăților esențiale ale categoriei de obiecte sau fenomene reflectate de noțiune. În didactica matematicii principala sarcină educațională constă în formarea abilității de dezvăluire a structurii logice a definițiilor obiectelor matematice și asimilarea definițiilor concrete.

În lucrarea [7] Robert H. Ennis recomandă o analiză tridimensională a definițiilor, referindu-se inclusiv la conceptul de „gândire critică”. În opinia sa, fiecare definiție are trei dimensiuni: formă, conținut și poziție. Autorul enumeră 14 definiții ale noțiunii „gândire critică”, inclusiv definiția formulată de el însuși: *Gândirea critică este gândirea reflexivă rațională care se concentrează pe luarea deciziei ce trebuie de crezut sau de făcut*.

Autorul consideră că, din punctul de vedere al formei, definițiile pot fi: clasificări, expresii echivalente, sinonime, sinonime extinse, definiții vagi și definiții operaționale. De asemenea, sunt declarate două forme auxiliare pentru definiții: a) exemplu/non-exemplu/caz limită și b) folosirea termenului într-o propoziție, pentru a comunica sensul în unele situații. Exemplele, non-exemplele și cazurile limită nu sunt definiții, dar pot fi foarte informative ca sens în unele situații. Non-exemplele și cazurile limită pot fi uneori deosebit de instructive, deoarece indică limite.

Poziția (atitudinea) este a doua dimensiune a definiției și se referă la ceea ce se intenționează a face cu definiția. Robert H. Ennis susține că există trei acțiuni de bază din această perspectivă: stipularea unui sens, raportarea unui sens și adoptarea unei poziții, deși există suprapuneri și cazuri limită. Definițiile care prevăd raportarea unui sens pot fi adevărate sau false. Definițiile care prevăd stipularea unui sens nu au această capacitate.

O a treia dimensiune a definiției, în opinia autorului, este conținutul propriu-zis al definiției, adică cuvintele care sunt folosite și semnificația lor.

În matematică definițiile care prevăd raportarea unui sens și adoptarea unei poziții nu sunt obiect de studiu, în virtutea necesității respectării rigorilor teoriei matematice.

În context educațional, putem accepta aceste trei dimensiuni ale definițiilor, pornind de la faptul că prin învățământul matematic se formează gândirea și rolul acestuia este vital în formarea principalelor operații mintale.

Dewey accentua raționalitatea, justificarea şi evaluarea demersului rațional, raționalitatea antrenată fiind cheia gândirii critice în viziunea sa.

Autorii studiului [14] definesc gândirea critică ca un set de capabilități și criterii pentru evaluarea calității epistemice a informațiilor disponibile și pentru calibrarea

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

constantă a încrederii noastre în acele informații, în vederea luării unei decizii, formării unei opinii, acceptării sau respingerii unei afirmații în mod corespunzător.

Robert H. Ennis face distincție între formarea de concepte și de concepții în plan educațional, iar în raport cu gândirea critică sunt enumerate 14 trăsături generale caracteristice pentru gânditorii critici ideali: 1) caută, dar și oferă formulări clare ale concluziilor sau întrebărilor; 2) caută și oferă motive clare și claritate despre relațiile dintre motive și despre concluzii; 3) încearcă să fie bine informați; 4) folosesc surse și observații credibile și, de obicei, le menționează; 5) iau în considerare situația în totalitate; 6) țin cont de preocuparea de baza în context; 7) sunt atenți la alternative; 8) sunt „deschiși" la minte: iau în considerare cu seriozitate alte puncte de vedere; renunță la apreciere (verdict) atunci când probele și motivele sunt insuficiente; 9) pot să adopte o poziție (atitudine) și să și-o schimbe, atunci când dovezile și motivele sunt suficiente; 10) caută atâta precizie cât admite natura subiectului; 11) caută adevărul atunci când are sens să facă acest lucru și, mai larg, încearcă să „facă bine" în măsura în care este posibil sau fezabil; 12) își folosesc abilitățile și capacitatea de gândire critică [7].

Rezultatele unui studiu descris în articolul [15] sugerează că pedagogiile de învățare activă care combină scrierea, interogarea, colaborarea și reflecția cu accent deliberat pe gândirea critică, au potențialul de a îmbunătăți semnificativ abilitățile respective ale elevilor și, prin urmare, ar trebui să fie favorizate față de abordările mai tradiționale care nu o fac.

În programele școlare, gândirea critică este adesea clar menționată ca un set fundamental de abilități ce trebuie formate ca, de exemplu, interpretare, analiză, inferență, evaluare, explicare și auto-reglementare. Psihologia contemporană pare sceptică cu privire la posibilitatea de a învăța euristici sau reguli generale și de a le aplica independent de conținut. Cu toate acestea, nu pare irațional să menținem speranța de a dezvolta anumite abilități cognitive într-un mod general, dincolo de un anumit conținut și context, sau cel puțin să le vedem transferate în mai multe situații diferite, atâta timp cât aceste abilități:

- se bazează pe strategii pe care le putem învăța și apoi le putem practica în mod consecvent în diferite contexte;
- sunt exprimate într-un mod abstract astfel încât să le găsim mai ușor și să dezvoltăm scurtături în memoria noastră.

Versiunea revizuită a taxonomiei lui Bloom tratează gândirea critică ca transpunând acele tipuri de procese cognitive care implică mai mult decât amintirea [2].

Elevii obțin rezultate optime la capitolul gândire critică atunci când dețin o serie de instrucțiuni clare privind abilitățile pe care le presupune aceasta. Elevii care sunt gânditori critic la matematică dezvoltă: implicare și înțelegere mai profundă; mai mare independență și autoreglare; competențe. Cristea S. consideră că la nivel de concept pedagogic operațional această abordare stimulează promovarea unei metodologii a instruirii eficiente

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

în situații multiple, diversificate, centrate pe: valorificarea unor aptitudini şi atitudini cognitive, cu efecte metacognitive pozitive; tratarea creativă a informației interiorizată, înțeleasă, aplicată şi analizată-sintetizată în contexte didactice și extradidactice deschise spre evaluarea critică [5].

Strategii didactice care contribuie la dezvoltarea gândirii critice a elevilor sunt expuse în [5, 6, 16].

În opinia noastră, potențialul contraexemplelor în matematică poate fi valorificat pentru a dezvolta abilități caracteristice unui individ capabil să se manifeste ca un gânditor critic.

2. Rolul contraexemplelor în dezvoltarea competențelor matematice și a gândirii critice

Un contraexemplu este orice excepție de la o generalizare. Un contraexemplu infirmă generalizarea și o face riguros în domeniile matematicii și filosofiei. Un contraexemplu este un exemplu, un caz particular sau un rezultat general, care contrazice primele impresii, folosit pentru a respinge o presupunere. În [17] sunt trei corelații cu termenul „contraexemplu”: infirmare; respingere; falsificare. Contraexemplele sunt adesea folosite pentru a demonstra limitele unor posibile teoreme.

În matematică sunt cunoscute contraexemple clasice, printre care: *funcția Dirichlet* – funcție care este discontinuă în fiecare punct; *funcția Weierstrass* – funcție continuă oriunde, dar diferențiabilă nicăieri; *funcția Cantor* – funcție monotonă, continuă care nu este o constantă, dar are o derivată care este zero în aproape toate punctele și altele.

Construirea unui contraexemplu este o modalitate obișnuită de a respinge ipoteze (conjecturi). Dacă există o declarație de genul „pentru orice X din mulțimea M, proprietatea A este satisfăcută”, atunci contraexemplul pentru această afirmație este: „există obiectul X_0 în mulțimea M pentru care proprietatea A nu este satisfăcută”. O abordare mai complicată, dar și mai eficientă, este construirea unui contraexemplu „pe părți”. Atunci când se alege următoarea „parte”, opțiunile neplauzibile sunt imediat eliminate. Absența unui contraexemplu nu servește drept dovadă a unei conjecturi.

Un model de urmat în aplicarea euristicii și dezvoltarea intuiției matematice oferă Imre Lacatos în lucrarea [9]. Autorul descrie diverse conversații euristice între eroi imaginari, care oferă modalități de judecată pentru identificarea soluțiilor unor probleme ivite în rezultatul unor observări și experimente mentale. Lakatos propune noțiunea de contraexemplu local și descrie o conversație euristică care conține critica prin contraexemple locale și globale a unei demonstrații bazate pe intuiție [9, p. 18]. Contraexemplele formulate de autor sunt însoțite de descrieri ale unor prototipuri ale figurilor imaginare invocate. Sunt nominalizate trei tipuri de contraexemple pentru afirmații implicative:

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

(1) Contraexemple la concluzie care nu sunt, de asemenea, contraexemple la vreuna dintre premise („contraexemple globale, dar nu locale”): acestea stabilesc că concluzia nu decurge cu adevărat din premisele enunțate. Ele ne cer să îmbunătățim demonstrația, să dezgropăm „lema ascunsă” pe care și contraexemplul o infirmă, astfel încât să devină un contraexemplu „local și global”.

(2) Contraexemple la una dintre premise, care nu sunt și contraexemple la concluzie („contraexemple locale, dar nu globale”): acestea ne cer să îmbunătățim proba prin înlocuirea premisei infirmate cu o nouă premisă care nu face obiectul contraexemplului și care (sperăm) va face la fel de mult pentru a stabili concluzia ca și premisa inițială respinsă.

(3) Contraexemple atât pentru concluzie, cât și pentru (cel puțin una dintre) premise („contraexemple globale și locale”): acestea pot fi tratate prin încorporarea premisei sau lemei infirmate în concluzia originală, ca o condiție a corectitudinii acesteia.

Lakatos vorbește despre „unitatea dialectică a dovezilor și infirmărilor”. Contraexemplele ajută să îmbunătățim demonstrația prin găsirea de leme ascunse.

Curriculum-ul la matematică pentru gimnaziu include, începând cu clasa a V-a, unitatea de competență *investigarea valorii de adevăr a unei afirmații, propoziții, inclusiv cu ajutorul contraexemplelor* [10]. Autorii manualelor aprobate pentru sistemul de învățământ introduc acest concept abia în clasa a VII-a prin observația: Pentru a demonstra că o propoziție nu este adevărată, este suficient să găsim un exemplu (numit contraexemplu) care contrazice propoziția [12, p 140].

Un singur exercițiu este destinat acestei unități de competență:

Demonstrați că următoarele propoziții sunt false, găsind un contraexemplu.

a) *„Dacă ultima cifră a unui număr natural este 7, atunci numărul este prim”.*
b) *„Orice număr de forma $\sqrt{a}$ este iraţional”.*
c) *„Nu există cuvinte în limba română care să conțină o secvență de 4 consoane alături”.*
d) *„Ecuația $x^2 = 2x$ nu are soluţii întregi.”*

În manualul pentru clasa a VIII-a este propusă afirmația „Dacă două laturi și un unghi ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi și un unghi ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt congruente.” Ca model de contraexemplu este prezentat desenul corespunzător și justificarea:

$\angle A \equiv \angle A$, $[AB] \equiv [AB]$, $[BC] \equiv [BC_1]$, însă $\triangle ABC \not\equiv \triangle ABC_1$ [13, p. 153].

Pentru antrenament sunt propuse exerciții de găsire a unor contraexemple la afirmațiile:

a) *Toate numerele prime sunt pare.*
b) *Toate păsările pot zbura.*
c) *Pentru orice $a \in R$, $|a| > 0$.*
d) *Suma a două numere iraționale este un număr irațional.*

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

În manualul pentru clasa a IX-a [11] se propune elevilor să demonstreze prin contraexemple că următoarele propoziții sunt false:

a) *Orice număr de forma* $\sqrt{a}$*, unde* $a \in \mathbb{N}$*, este irațional.*
b) *Câtul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.*
c) *Dacă o secantă formează cu dreptele* a *și* b *patru unghiuri de 70º și alte patru unghiuri de 110º, atunci dreptele* a *și* b *sunt paralele.*
d) *Orice număr rațional poate fi scris sub formă de fracție în mod univoc.*

Robert H. Ennis descrie patru grupuri de abilități generale caracteristice procesului de gândire critică, care sunt redate în tabelul de mai jos [7].

Clarificare de bază	Bază pentru o decizie	Inferență	Clarificare avansată
a se concentra pe o întrebare; a analiza argumentele; a pune și răspunde la întrebări de clarificare; a înțelege și folosi grafice și matematică elementară;	a aprecia credibilitatea unei surse; a observa și aprecia rapoartele provenite din observație; a utiliza cunoștințele existente: cunoștințe de bază, inclusiv (cu discreție) materiale din internet; cunoașterea proprie asupra situației; a aplica concluziile proprii stabilite anterior;	a deduce și aprecia deducții; a formula și evalua inferențe și argumente inductive: prin inducția enumerativă; prin argumentare și referire la cea mai bună explicație; a emite și aprecia judecăți de valoare.	a defini termenii și evalua definițiile; a gestiona ambiguitățile în mod corespunzător; a atribui și aprecia ipotezele neenunțate; a gândi în bază de supoziții; a administra etichetările eronate; a fi conștienți și a verifica calitatea propriei gândiri ("metacogniție"); a trata lucrurile într-o manieră ordonată.

A folosi strategii retorice – este considerată o abilitate suplimentară utilă.

Lista de abilități expusă mai sus poate fi completată și valorificată în procesul de dezvoltare a gândirii critice prin intermediul soluționării sarcinilor de formulare și comentare a contraexemplelor.

3. Demers experimental privind dezvoltarea gândirii critice a elevilor prin utilizarea contraexemplelor în studierea matematicii

Standardele actuale în educația matematică solicită un accent pe rezolvarea problemelor, raționament, reprezentare și comunicare. Fiecare dintre aceste procese (sau „practici matematice”) este consolidat atunci când elevii gândesc critic la matematică.

Folosirea metodelor precum problematizarea și învățarea prin descoperire în cadrul orelor crește dezvoltarea gândirii critice la elevi, precum și utilizarea unor metode

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

complementare de dezvoltare a gândirii critice: demonstrația, algoritmizarea și rezolvarea de exerciții și probleme.

Inferența este componenta unui proces logic, care derivă o concluzie dintr-o premisă, adică extrage o consecință necesară dintr-o descriere de stare dată. Prin folosirea demonstrației matematice, elevilor li se dezvoltă capacitatea de a lua decizii gândite și argumentate, nu doar bazate pe intuiție. Pentru a favoriza dezvoltarea gândirii critice, este important ca și în cadrul demonstrațiilor matematice să perseverăm în a crea obstacole elevilor pentru ca ei să argumenteze fiecare relație obținută, să îi coordonăm în a lua decizii proprii de rezolvare. Prin folosirea algoritmizării, elevilor li se dezvoltă gândirea critică atât în etapa descoperirii pașilor algoritmului ce urmează a fi aplicat, dar mai ales în etapa argumentării eficienței algoritmului, când elevilor li se dezvoltă capacitatea de a lua în calcul și alte perspective.

Metoda exercițiilor și rezolvărilor de probleme, frecvent utilizată, contribuie la dezvoltarea gândirii critice a elevilor, deoarece, pentru a rezolva o problemă, elevii au nevoie să combine regulile învățate anterior, să traseze propria strategie de rezolvare, să emită propriile judecăți, să ia în calcul și alte perspective. Însă, constatăm că este subestimată importanța formării abilităților ce țin de luarea deciziei și clarificare avansată, care servesc la formarea propriei concepții într-un domeniu, la gândirea în bază de supoziții, la conștientizarea și verificarea calității propriului demers metacognitiv.

Considerăm necesară o clasificare a tipurilor de contraexemple care pot fi utilizate pentru a eficientiza învățarea, pentru a consolida cunoștințele elevilor. Implicit, sarcina va consta în a-i provoca pe elevi să abordeze critic toate afirmațiile pe care le aud, le citesc. Afirmațiile pot fi atât în definiții, teoreme, cât și în problemele de calcul, de demonstrați. În acest context au fost analizate sistemele de exerciții și probleme în care se solicită stabilirea valorii de adevăr a unor afirmații propuse de autorii manualelor de matematică pentru gimnaziu care sunt în vigoare în Republica Moldova. Au fost identificate sarcini de următoarele tipuri:

1. Exemple în care sunt verificate anumite calcule la baza cărora stau identități algebrice memorate eronat. Ele se rezolvă prin efectuarea calculelor concrete corect. Prin acest tip de sarcini efectul asupra dezvoltării abilităților orientate spre dezvoltarea gândirii critice este minim.
2. Exemple prin care se solicită rezumarea sub concept. Aceste exemple conțin formulări eronate ale unor definiții, definiții din care sunt omise cuvinte cheie, definiții în care sunt comutați termenii etc. Stabilirea erorilor de diversă natură în definițiile obiectelor matematice cu ajutorul contraexemplelor solicită un efort conștientizat, care va pune în valoare și necesitatea lecturării manualului. Constatăm că în manualele examinate este prezent un număr redus de astfel de exemple. Rolul lor este esențial pentru o clarificare avansată în formarea conceptelor. În același timp,

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

3. Exemple în care se verifică cunoașterea unor proprietăți ale obiectelor matematice. Printre exemplele de acest tip predomină sarcinile de a stabili dacă reciproca unei afirmații demonstrate reprezintă o teoremă și dacă unele afirmații formulate în baza aplicării nefondate a analogie sunt adevărate.

Există posibilități de a spori eficiența contraexemplelor în dezvoltarea competențelor matematice, dar și a abilităților de gândire critică prin includerea sarcinilor prin care ar avea loc:

- Evidențierea tuturor proprietăților fixate în definiție.
- Stabilirea unei legături logice între diferențele de gen și specie pentru noțiunea definită.
- Identificarea erorilor logice și de conținut în definițiile date.
- Anticiparea unor aspecte ce țin de proprietățile obiectelor matematice pe diverse mulțimi și spații.
- Contrapunerea sferei și volumului noțiunii.
- Stabilirea condițiilor necesare pentru ca o afirmație să fie adevărată.
- Stabilirea condițiilor suficiente pentru ca o afirmație să fie adevărată.
- Stabilirea condițiilor necesare și suficiente pentru ca o afirmație să fie adevărată.
- Aplicarea cuantificatorilor universal și existențial.
- Identificarea importanței respectării ordinii apariției cuantificatorilor în teoreme.
- Soluționarea sofismelor
- Aplicarea inducției incomplete ș.a.

În urma studierii potențialului contraexemplelor în aspect teoretic a fost organizat un mini-experiment pedagogic care a vizat dezvoltarea abilităților de compunere și soluționare a contraexemplelor. În experiment au fost implicați 45 de elevi din clasele a 9-a la etapa de pregătire către examenele de absolvire a gimnaziului. Rezultatele testului aplicat la etapa de constatare au permis identificarea unor strategii didactice de ameliorare a situației privind abordarea critică a conținuturilor matematice și facilitarea înțelegerii acestora prin formularea și soluționarea de contraexemple. Au fost elaborate șase proiecte de scurtă durată (trei la algebră și trei la geometrie) implementate în cadrul experimentului formativ pentru lecțiile de recapitulare. În calitate de subiecte relevante pentru înțelegerea și aplicarea conceptului de contraexemplu de către elevi, au fost abordate următoarele: divizibilitate, ecuații și inecuații, numere prime, axiome și teoreme, elementele triunghiului, cercul, unghiuri în cerc, patrulatere inscriptibile. Rezultatele experimentului au permis formularea următoarelor **concluzii.**

Activitățile de cercetare a afirmațiilor care conduc la determinarea valorii de adevăr, justificarea propozițiilor adevărate și respingerea cu contraexemple îmbunătățesc abilitățile de raționament logic ale elevilor. Utilizarea contraexemplelor în matematica școlară

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

consolidează cunoștințele, iar procesul de găsire a contraexemplelor ajută la esențializarea conceptelor și dezvoltă gândirea critică. Diverse studii semnalează că elevii au dificultăți în a genera contraexemple pentru propoziții false, însă puține publicații propun materiale educaționale care pot fi aplicate în școală.

Profesorii pot preda în mod explicit contraexemple și pot oferi exemple pentru a arăta că afirmația inițială (sau presupunerea) este falsă. Aceasta susține capacitatea elevilor de a raționa și de a argumenta. Identificarea contraexemplelor este utilă atunci când elevii răspund la întrebări teoretice, comițând erori. Erorile persistente produse de elevi vor fi folosite la alcătuirea itemilor cu răspunsuri multiple. O sursă de contraexemple pot fi problemele cu desene gata, care pot produce confuzii bazate pe defectele analizei perceptive. Profesorii pot folosi, de asemenea, contraexemple pentru a scoate la iveală concepții greșite

Alternativ, profesorii pot încuraja elevii să folosească contraexemple în raționamentul și justificările lor. Pentru a-și îmbunătăți raționamentul matematic, elevii trebuie să înțeleagă ce este un contraexemplu, cum și când să le folosească.

Cei ce gândesc critic pot combina cu ușurință idei și informații, întrucât pornesc de la o bază de cunoștințe familiară și evidentă. Fiind siguri de propriile achiziții, ei sunt pregătiți să folosească în mod creativ această bază, pentru a rezolva probleme, a formula opinii și a genera noi idei.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. ACHIRI, I., TURLACOV, Z. ș.a. *Metodica predării matematicii*, Vol. I. Chișinău: Lumina, 1992. 281p.
2. ANDERSON, L. W.; KRATHWOHL, D. R.; AIRIASIAN, P. W.; CRUIKSHANK, K. A.; MAYER, R. E.; PINTRICH, P. R.; RATHS, J.; WITTROCK, M. C. *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman, complete edition, 2001.
3. DEWEY, J. *How We Think*. Boston: D.C. Heath, 1910.
4. DEWEY, J. How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process. Lexington, MA: D.C. Heath. 1933.
5. Didactica Pro. *Dezvoltarea gândirii critice*. Nr. 3 (97), iunie 2016. Chișinău, 60 p.
6. DOSCHINESCU, C.; ZASTÎNCEANU, L. Fundamente specifice ale dezvoltarii gandirii critice la matematica. In: *The use of modern educational and informational*

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

technologies for the training of professional competences of the students in higher education institutions. 6-7 decembrie 2019, Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți, 2019. pp. 189-195.

7. ENNIS, R. Definition: A Three-Dimensional Analysis with Bearing on Key Concepts. In: Patrick Bondy and Laura Benacquista (eds.). *Argumentation, Objectivity, and Bias: Proceedings of the 11th International Conference of the Ontario Society for the Study of Argumentation (OSSA),* 18–21 May 2016. Windsor, ON: OSSA, pp. 1–19.
8. HATCHER, D.; SPENCER, L. A. *Reasoning and Writing: From Critical Thinking to Composition* (3rd ed). Boston: American Press, 2006. (Original work published by Copley Publishing, 1992, and Rowman and Littlefield, 1993.)
9. LAKATOS, I. *Dokazatelistva i oproverjenia*. M.: Nauka, 1967. 152 p.
10. Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova. *Matematică: Curriculum național: Clasele 5-9: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare*. Chişinău: Lyceum, 2020. 180 p.
11. ACHIRI, I.; BRAICOV, A.; ŞPUNTENCO, O. *Matematică: Manual pentru clasa a IX-a.* Ed. a 2-a. Chişinău: Cartdidact, 2016. 228 p.
12. ACHIRI, I.; BRAICOV, A.; ŞPUNTENCO, O. *Matematică: Manual pentru clasa a VII-a*. Ed. a 2-a. Chişinău: Cartdidact, 2018. 232 p.
13. ACHIRI, I.; BRAICOV, A.; ŞPUNTENCO, O. Matematică: Manual pentru clasa a VIII-a. Chişinău: Prut Internaţional, 2019. 224 p.
14. PASQUINELLI, E.; FARINA, M.; BEDEL, A.; CASATI, R. Defining and educating critical thinking. *Report produced within the framework of Work Package* 1 EEC Project - Critical Education (ANR-18-CE28-0018) June 2020.
15. STEPHENSON, N.S.; MILLER, I.R.; SADLER-McKNIGHT, N.P. Impact of Peer-Led Team Learning and the Science Writing and Workshop Template on the Critical Thinking Skills of First-Year Chemistry Students. In: *Journal of Chemical Education*, 2019. Nr. 96, p. 841−849.
16. TEMPLE, Ch.; STEELE, J.; MEREDITH, K. Strategii de dezvoltare a gândirii critice. *Supliment al revistei Didactica Pro…*, nr. 2, 2002. 88 p.

© Sali Larisa, Anton Felicia, 2022

CZU: 372.851

IMPORTANȚA CONTEXTELOR CU CARACTER APLICATIV ÎN DEZVOLTAREA MOTIVAȚIEI PENTRU STUDIEREA MATEMATICII

Larisa SALI
Mirela COVALCIUC
Natalia CAȘU
Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: larisa.sali2018@gmail.com

Rezumat. În articol sunt analizate unele studii care vizează sporirea motivației elevilor prin valorificarea diferitor contexte cu caracter aplicativ. Se accentuează importanța asumării de către profesor a misiunii de a promova posibilitățile de utilizare a matematicii în activitatea cotidiană, dar și în diverse profesii.
Cuvinte cheie: rezolvare de probleme, aplicații ale matematicii, motivație, învățare contextuală, procedeu didactic.

Abstract. The article analyzes some studies aimed at increasing students' motivation by capitalizing different contexts with an applicative nature. The importance of the teacher's assumption of the mission to promote the possibilities of using mathematics in everyday activity, but also in various professions, is emphasized.
Keywords: problem solving, applications of mathematics, motivation, contextual learning, teaching method.

Motto: Practica este mama învățăturii

Ce este cu matematica care provoacă reacții puternice la atât de mulți copii și adulți? Dacă s-ar cere să se facă o asociere rapidă cu „matematica”, primul lucru care va apărea multor minți ar fi „anxietatea matematică”. Anxietatea matematică pare a fi un comportament învățat și este asociată cu experiențele din școală. În consecință, atitudinile pozitive și motivația elevilor față de matematică scad de-a lungul anilor de școală gimnazială și până la liceu [7, 9 pp. 933–1002], inclusiv plăcerea și prețuirea matematicii [2, 8].

Metodele de învățare centrată pe elev fac lecțiile interesante, sprijină elevii în înțelegerea conținuturilor pe care să fie capabili să le aplice în viața reală. Cu toate că ideea abordată este una constructivă și atractivă, apar numeroase semne de întrebare având în vedere succesul elevilor/adolescenților la orele de matematică, deoarece atunci „*când copiii merg prima dată la școală, aceștia au, de obicei, atitudini pozitive față de matematică, dar pe măsură ce progresează, atitudinile lor devin mai puțin pozitive și devin frecvent negative la liceu.”* susțin M. Nikolaidou și G. Philippou [3].

Analizând posibilele întrebări, am încercat să abordăm problema dezvoltării motivației elevilor în procesul de învățare a matematicii în ciclul gimnazial. Perioada de vârstă 11-16 ani este destul de importantă în trezirea interesului pentru învățare. Este etapa

© Sali Larisa, Covalciuc Mirela, Casu Natalia, 2022

cu cele mai multe transformări şi modificări în fizicul şi psihicul copiilor, caracterizată prin faptul că acum copilul începe să raționeze logic și sistematic [4]. În perioada respectivă se consolidează inteligenţa şi structurile gândirii logico-formale, care contribuie la formarea personalității.

În urma unui studiu realizat de către L. Beznițchi și R. Copăceanu s-a constatat că cele mai efective metode și procedee de motivare a elevilor pentru studiul matematicii se bazează pe utilizarea contextelor cu caracter aplicativ. În cadrul acestui studiu, la întrebarea: „Ce te-ar motiva pentru studiul eficient al matematicii?” 33% dintre elevii intervievați au dorit mai multe aplicații practice. Autorii propun o gamă largă de probleme cu caracter motivant și aplicativ utilizate în practica educațională [1].

Prin comparație, în urma unui studiu realizat în cadrul cercetării noastre, la întrebarea *„Care activități utilizate de profesor îți oferă cele mai mari satisfacții?”* 26,8% dintre elevii claselor a IX-a intervievați (41 de persoane) au ales probele practice, iar 12,2% - excursiile, vizitele ș.a. Solicitând opinia elevilor în ce măsură preferă învățarea, inclusiv a matematicii, în cadrul activităților practice – 48,8% au optat pentru acest tip de activitate în comparație cu alte modalități. În plus, la întrebarea: *„Ce credeți că ar trebui făcut pentru ca elevii să participe mai activ la procesul de învățământ?”* – 39% din cei chestionați doresc să lege mai des cunoștințele teoretice de practică. Astfel, s-a dedus că interesul şi motivația elevilor pentru învățarea matematicii în gimnaziu depind de mai mulţi factori, printre care cel mai important constă în soluționarea problemelor cu conţinut atractiv şi practic.

În articolul [10] se relatează despre o cercetare a opiniilor profesorilor școlari privind aplicațiile matematicii în viața de zi cu zi. Profesorii implicați în studiu au afirmat că abilitatea de a folosi matematica depinde în mare măsură de mediul școlar (27%), de calitatea activităților din viața de zi cu zi (22%), de interesul individului pentru matematică (21%), de volumul efortului individual depus (15%) și de competență matematică (14%). La întrebarea „Care este rolul dvs ca profesor în formarea persoanelor care folosesc matematica mai eficient?” răspunsurile au fost grupate în următoarele categorii: oferirea studiilor de calitate; educarea atitudinii pozitive față de matematică; autoperfecționarea; relația profesor-elev confortabilă. Una dintre constatări a fost că elevii care practică o învățare semnificativă la cursul de matematică și au atitudini pozitive față de matematică o pot folosi eficient în viața lor de zi cu zi. Profesorii ar trebui să-i ajute mai întâi pe elevi să îndrăgească matematica, să promoveze o învățare semnificativă și să comunice cunoștințe matematice asociindu-le cu viața de zi cu zi, pentru a educa persoane care pot folosi matematica eficient în viața lor [8].

Programului pentru Evaluarea Internațională a Elevilor (PISA), organizat de Organizația pentru Cooperare și Dezvoltare Economică are ca scop evaluarea sistemelor de învățământ la nivel internațional, analizând măsura în care elevii de 15 ani care

© Sali Larisa, Covalciuc Mirela, Casu Natalia, 2022

finalizează învățământul obligatoriu au acumulat cunoștințe și deprinderi cheie, esențiale pentru a participa activ în societățile contemporane. Autorii raportului elaborat de Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare din cadrul Ministerului Educației, Culturii și Cercetării din Republica Moldova în comun cu Organizația pentru Cooperare și Dezvoltare Economică (OECD) în anul 2018 consideră că evaluările la matematică trebuie elaborate astfel încât acestea să nu mai vizeze doar unele dimensiuni ale obiectivelor de învățare, ci modul în care elevii pot utiliza cunoștințe și abilități în situații și probleme reale. Îmbinarea itemilor teoretici cu sarcini aplicative este caracteristica de bază a evaluărilor în sistemele educaționale cu performanțe de top [9, p. 161]. Menționăm că în anul 2018 punctajele medii ale Republicii Moldova sunt mai mici decât media OECD și doar 50% din numărul tinerilor în vârstă de 15 ani au atins nivelul de bază al performanțelor la matematică [9, p. 37-38].

În articolul [6, p. 40-49] este expusă o gamă de procedee de captivare a elevilor la lecțiile de matematică şi în cadrul activităților extracurriculare:

Procedee de captivare prin formularea sau prezentarea sarcinii	**Procedee de captivare prin structura sarcinii**	**Procedee legate de organi-zarea şi structura procesului de executare a sarcinii**
Introducerea unui erou „matematician” care propune probleme, rezolvă probleme, inventează trucuri, scamatorii de tot felul, sau a unui „nematematician”, care comite greşeli, ajunge la paradoxuri.	Inversarea sarcinii – având componentele şi rezultatul, să se restabilească operaţiile.	Compunerea unor propoziții false în baza propozițiilor adevărate cunoscute (folosind operaţiile mintale: analogia, inducţia, deducţia, compararea, generalizarea, specificarea, trecerea la limită, etc.)
Expunerea unor istorioare ce conduc la formularea independentă a unei afirmaţii matematice.	Soluționarea unei contradicţii – într-o afirmaţie sunt prezente proprietăţi contradictorii.	Întrebări fulger.
Aplicarea analogiei.	Introducerea de interdicţii.	Codarea informaţiei.
Prezentarea unor scheme, desene, formulări neobişnuite.	Cerința de a modifică desenul, imaginea.	„Dintr-o privire” stabileşte adevărul propoziţiei
Selectarea unor obiecte sau afirmaţii care satisfac anumite criterii.	Găseşte greşeala!	„Inventează!”
Prezentarea unei carcase logice generale pentru a realiza asocieri, concretizări, particularizări.	Cazuri deosebite (general, particular, cazuri limită).	Reconstituirea obiectelor.
Sarcină cu puncte de suspensie.	Provocarea greşelii.	Săgeata (iteraţiile, recurenţa).
Corespondenţă.	Distrugerea stereotipurilor.	Utilizarea momentelor de joc: situaţii de joc, jocuri matematice, aflarea strategiei câştigătorului.

Clasificarea obiectelor după diverse principii, formularea ipotezelor şi stabilirea valorii lor de adevăr.	Utilizarea unor metode noi de raționament, necunoscute până la moment.	Rezolvarea problemelor dintr-un domeniu, prin metode din alt domeniu, demonstrarea unei afirmaţii prin mai multe metode.

De asemenea, au fost propuse recomandări privind compunerea de sarcini cu caracter captivant folosind procedeele enunțate mai sus, care pot fi utile profesorilor, studenților, dar și elevilor. Motivația ia naștere din interesul elevului pentru tematica abordată. De aceea, este cazul să atragem o atenție aparte alegerii, formulării şi prezentării problemelor pe care le propunem spre rezolvare. O problemă trebuie să fie relevantă din punctul de vedere al elevului, să fie legată de cotidian, să pornească de la un fapt cunoscut, familiar sau să aibă aplicație practică [6].

După G. Polya, dacă se dorește mobilizarea elevului, este necesar să-l determinăm să depună un efort autentic, trebuie să îl convingem că merită „să-şi bată capul”. Un alt tip de motivare presupune implicarea elevilor. De exemplu, înainte să înceapă să rezolve problema, determinaţi-i să anticipeze rezultatul. În acest fel îi punem în situația de a se angaja în proces: prestigiul lor depinde, într-un fel, de rezultat – prin urmare, ei nu vor „sta deoparte” și se vor pune pe lucru [5].

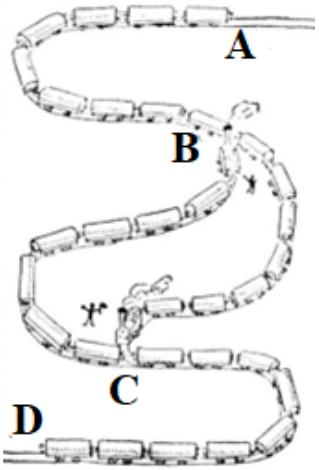
Mulți elevi explică lipsa motivației pentru studierea matematicii prin faptul că nu găsesc circumstanțe în care matematica le-ar putea fi de ajutor. Posibil, sistemul de învățământ nu este suficient de strategic, posibil, metodele de predare nu sunt abordate corect, dar cert este faptul că elevii sunt cei care cer aplicații și caută scopul matematicii în fiecare zi. Ei au nevoie de prezentarea situațiilor concrete de utilizare și aplicare a informației, să se facă o corelare a cunoștințelor însușite anterior. Corelarea cunoștințelor prin problemele aplicative contribuie substanțial la realizarea educației elevilor, la formarea și dezvoltarea flexibilității gândirii, a capacităților lor de a aplica cunoștințele în practică.

În vederea dezvoltării interesului şi a motivaţiei elevilor pentru învăţarea matematicii sunt oferite diverse sugestii ce țin de aplicațiile matematicii în activitatea zilnică, de exemplu în [12].

Indicăm câteva tipuri de probleme care permit crearea de contexte pentru sporirea motivației: *probleme cu caracter economic-financiar; probleme de mișcare; probleme legate de jocuri și enigme în mediul virtual; probleme de tăiere și pliere* (Multe noţiuni geometrice pot fi uşor înțelese şi interiorizate pornind de la construcții simple (origami, flexagoane; obținerea centrului unei figuri fără a avea la îndemână instrumentele necesare; restabilirea figurii descrise în cuvinte sau date secvențial etc.). Acest tip de probleme, relativ simple, au aplicabilitate nemărginită în contexte reale, începând de la cea mai modestă ocupație până la *„șlefuitor de diamante”*.); *probleme din domeniile arhitecturii și*

design-ului (arhitectură; artă vizuală; design de interior; design de exterior; design al landșaftului; design vestimentar; design al vehiculelor etc.); *probleme practice* (managementul timpului; sport, medicină și sănătate; alimentație; agricultură; schimbări climatice și ecologie; sociologie, probleme de optimizare; marketing etc.)

Ca exemplu vom propune subiectul „**Harababura din gară”**. Desenul alăturat reprezintă o parte a căilor ferate dintr-o gară. Este o singură linie cu o buclă. Între B și C există loc pentru opt vagoane sau șapte vagoane și o locomotivă, fie pe linia stângă, fie pe linia dreaptă a buclei. S-a întâmplat ca două trenuri de marfă (fiecare constând dintr-o locomotivă și șaisprezece vagoane) să ajungă în poziția prezentată în ilustrație. Părea un blocaj fără speranță și fiecare conductor de locomotivă dorea ca celălalt să se întoarcă la stația prin care trecuse și să decupleze nouă vagoane. Însă un impiegat ingenios s-a angajat să treacă trenurile și să le trimită în călătoriile respective cu locomotivele lor în mod corespunzător în față. De asemenea, el a încercat să inverseze direcția de mers a locomotivelor de cât mai puține ori. Tu te-ai fi descurcat? Și de câte ori ai avea nevoie să inversezi direcția de mers a locomotivelor? O „inversare” a direcției de mers a locomotivelor înseamnă o schimbare de direcție înapoi sau înainte. Nu este permis niciun truc. Toată tracțiunea trebuie să fie făcută în mod corect de cele două locomotive. Este un puzzle simplu, dar interesant.



Concluzii

Matematica îsi face simțită prezența în toate domeniile, fiind folosită din ce în ce mai mult în științele sociale, economie, industrie cât și în contextele cu caracter aplicativ din activitatea cotidiană.

Predarea matematicii într-un context de maximizare a eficienţei educaţionale, depinde de înţelegerea organizării psihice a fiecărui elev în parte, de cunoaşterea factorilor psiho-educaţionali ce fac posibil procesul învăţării, de calitatea metodelor utilizate în procesul predării, de cunoaşterea principiilor generale ale psihodidacticii matematicii.

Profesorul de matematică trebuie nu numai să provoace şi să întreţină un activism general, dar să şi controleze raporturile imagine-concept-problemă-situaţie problematică-acţiune-competenţă. În acest mod, el dă o tentă dinamogenă motivaţiei învăţării matematicii.

Activitățile unde elevii rezolvă probleme aplicative, interdisciplinare, fără un răspuns fix și rigid, relaxează elevii, și îi fac mai deschiși cunoașterii, le sporesc interesul și motivația, iar motivația pozitivă, bine fundamentată, a elevilor în învățare are un impact enorm asupra rezultatelor și performanțelor școlare ale acestora.

© Sali Larisa, Covalciuc Mirela, Casu Natalia, 2022

Bibliografie

1. BEZNIȚCHI, L.; COPĂCEANU, R. Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei în învăţarea matematicii. În: *Didactica Pro*, Nr. 3 (85), 2014. p. 48-54.
2. MIDDLETON, J.; SPANIAS, P. Motivation for Achievement in Mathematics: Findings, Generalizations, and Criticisms of the Research, 1999.
3. NIKOLAIDOU, M.; PHILIPPOU, G. Attitudes towards Mathematics, Self-Efficacy and Achievement in Problem Solving, 2003.
4. PIAGET, J.; INHELDER, B. The Origin of the Idea of Chance in Children Psychology Revivals, 1970.
5. POLYA, G. *Matematica şi raţionamentele plauzibile*. vol. I şi II. Bucureşti: Editura Ştiinţifică, 1962.
6. SALI, L. Procedee de compunere a sarcinilor cu caracter captivant la matematică. In: *Revista Delta*, nr. 1 (7) 2008. p. 40-49.
7. STIPEK, D. J. Motivation to Learn: Integrating Theory and Practice, 2002.
8. WIGFIELD, A. Reading motivation: A domain-specific approach to motivation. p. 59-68, 1997.
9. WIGFIELD, A.; BYRNES, H.; ECCLES, J. S. Handbook of child psychology: Social, emotional, and personality development. p. 933–1002, 2006.
10. YAVUZ, M. Examining mathematics department students' views on the use of mathematics in daily life. In: *International Online Journal of Education and Teaching* (IOJET), 5(1), 61-80.
11. https://ance.gov.md/sites/default/files/raport_pisa2018.pdf
12. https://ofwmoney.org/uses-of-mathematics/

© Sali Larisa, Covalciuc Mirela, Casu Natalia, 2022

CZU: 372.851:811.111

ON THE PROBLEMS OF TEACHING THE HIGHER MATHEMATICS IN ENGLISH

Nataliia V. SNIZHKO
National University "Zaporizhzhya Polytechnic", Ukraine
e-mail: snizhko.nataliia@gmail.com

Abstract. In this paper are identified the most common, specific problems, from the point of view of the author, teachers of higher mathematics face when teaching the course in English, as well as possible ways to overcome them.
Keywords: teaching of higher mathematics teaching, English, teacher's methodological qualification, methodological support.

DESPRE PROBLEMELE PREDĂRII MATEMATICII SUPERIOARE ÎN ENGLEZĂ

Rezumat. În această lucrare sunt identificate cele mai frecvente, specifice probleme, din punctul de vedere al autorului, cu care se confruntă profesorii de matematică superioară la predarea cursului în limba engleză, precum și posibilele modalități de depășire a acestora.
Cuvinte cheie: predarea matematicii superioare, limba engleză, calificarea metodologică a profesorului, suport metodologic.

In recent years, the National University "Zaporizhzhya Polytechnic" has been teaching a course of higher mathematics in English for Electrical Engineering students. The advantages of such a decision are absolutely obvious in the context of globalization, integration of the university and its graduates into the international educational system. But despite the obvious advantages, there are also disadvantages of such courses.

Below we will formulate the most common, specific problems teachers of higher mathematics face when teaching the course in English, as well as possible ways to overcome them.

The first problem is related to the students' English language entry level (because they are freshmen). From the very beginning, they start to listen to lectures in English, communicate in English in practical classes, use methodological recommendations written in English. This is a challenge for them due to the lack of similar learning experience in the past. This situation can force the teacher to simplify the explanation, to avoid considering some important, but difficult to understand details. And this can lead to insufficient and incomplete study of some aspects of the subject. This problem is solved by intensifying the study of English in the first year (students of "English" groups have additional hours of English compared to students of "regular" groups).

© Snizhko Nataliia, 2022

The second problem is that teaching a subject in a foreign language (as well as students' perception of the material) inevitably takes place at a slow pace. The teacher must speak clearly, not quickly; quite often, it is necessary to repeat the phrase several times. Students' perception and comprehension of information is also slower. It takes some time and effort of students. As a result, within the planned classroom hours of higher mathematics, students of "English-speaking" groups have time to master a smaller amount of material than those who study in their native language. This situation can affect the implementation of the curriculum. And here the teacher's experience is of great importance, as it is experience that allows a critical approach to the information selection and the sequence of its processing. Thus, this problem is solved by the teacher's methodological qualification.

The third problem is related to the following fact: in contrast to those technical universities, where the English mathematics course is taught as an additional (optional) to the main course in the native language (in parallel), in "Zaporizhzhya Polytechnic" the English language course is the only higher mathematics course. As a result, the teacher is obliged to duplicate terminology in the native language. This is obviously necessary in order to have an adequate understanding of terminology and use it correctly in a professional context. Therefore, the teacher must give the exact equivalent for each term in the native language, explain the term in other words, give a definition or example, and compile a glossary for each topic.

Finally, another problem stems from differences in approaches to teaching higher mathematics to students in Ukraine and abroad. As you know, English-language mathematics is more focused on practical competencies and skills. There is a view that the main purpose of foreign mathematics education is to know how, and of domestic one – to know why.

Therefore, Ukrainian pupils and students can easily operate with complex numbers, trigonometric and logarithmic transformations, solve non-trivial stereometric problems, systems of linear equations, but get lost when performing the simplest combinatorial, statistical, financial calculations, confused in graphical information, cannot formalize the problem described in terms of a specific life situation.

In foreign educational institutions, this is taught in secondary school, and in some places even in primary school. It should also be noted that in English-language mathematics tests, control works and exams are also presented in a slightly different way than our students are used to. All this does not allow using only English textbooks and manuals (foreign for our students), because they do not take into account our realities of learning.

There is a need to create methodological support for the course, which would combine the principles of foreign mathematics education and the realities of our school education.

© Snizhko Nataliia, 2022

Methodological manuals in English (lecture notes, materials for independent work, examples of solving practical and situational tasks, calculation and control works with samples of performance) should contain a list of special terms in English and native language. Thus, we consider it expedient to use both the original English-language textbooks and manuals created especially for such courses by the university teaching staff in order to bridge this gap between English-language and domestic higher mathematics.

Bibliography

1. SNIZHKO, N. Про проблеми викладання вищої математики іноземною мовою. In: N. Snizhko, V. Rudnieva. *Interaction of society and science: problems and prospects*. Abstracts of III Int. Sci. and Pract. Conf. London, England, 2021. pp. 355 – 361. (in Ukrainian).
2. SNIZHKO, N.V. Features of teaching higher mathematics to students who are doing the course in a foreign language. In: N.V.Snizhko, V.M.Rudnieva. *Педагогічні науки: теорія та практика*, 2022. № 1. с. 297 – 303. (in English).

© Snizhko Nataliia, 2022

CZU: 378.147:51+371.212

CU PRIVIRE LA METODE DE PREDARE A MATEMATICII PENTRU STUDENŢII CU NIVEL DIFERIT DE PREGĂTIRE LICEALĂ

Lilia SOLOVEI
Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, Republica Moldova
e-mail: soloveililia1711@yahoo.com

Rezumat. În lucrare sunt descrise dificultățile de predare a matematicii pentru studenții cu un nivel diferit de formare a competențelor la matematică și sunt propuse soluții de către autor care ar contribui la depășirea acestora. De asemenea, sunt descrise strategiile didactice pentru soluțiile propuse: metodele și tehnologiile recomandate.
Cuvinte cheie: pregătirea matematică, Curriculumului Național la Matematică, competență.

Abstract. In the paper, the difficulties of teaching mathematics to students with different levels of mathematical skills are described, and solutions are proposed by the author that would contribute to overcoming them. The didactic strategies for the proposed solutions are also described: the recommended methods and technologies.
Keywords: mathematical preparation, National Curriculum in Mathematics, competence.

Una dintre sarcinile principale ale învățământului superior este formarea specialiștilor de înaltă calificare, care posedă cunoștințe științifice fundamentale și abilități aplicative. Acest lucru este valabil și pentru pregătirea matematică, care este deosebit de importantă pentru domeniile tehnice și economice.

Un aspect esenţial al organizării procesului de studiu la disciplinele matematice în instituții de învățământ superior îl constituie nivelul inițial de pregătire matematică al studenților din anul I. El se caracterizează printr-o eterogenitate extremă, deoarece o parte din numărul studenților au studiat matematica conform programului de profil umanist. Conform Curriculumului Național la Matematică pentru clasele a X-a – XII-a și Ghidului de implementare la Matematică aprobate în 2019 unitățile de conținut „Matrice“, „Limite de funcții“, „Funcții derivabile. Aplicații ale derivatelor“, „Primitiva. Integrala nedefinită“, „Integrala definită“ nu mai fac parte din planul de învățământ la matematică în clasele cu profil umanist [1]. Or, este evident că pentru asimilarea cu succes a cursului de matematică în universități este necesară cunoașterea anumitor teme. De asemenea, ar trebui să se țină cont de problema complexității matematicii pentru studenții de la profilul umanistic, care în cele mai multe cazuri se explică prin predarea ei inadecvată la liceu – superficială, fără a explica fundamentele și legitățile anumitor fenomene matematice, prin lipsa exemplelor practice şi argumentării necesității studierii ei pentru fiecare persoană. Astfel, profesorul trebuie să ia în calcul faptul că la începutul primului an de studii în fiecare grupă ar putea exista un procent semnificativ de studenți cu un nivel inițial insuficient de competențe, adică o problemă care trebuie soluționată. Numărul redus de ore auditoriale face mai

© Solovei Lilia, 2022

dificilă instruirea studenților la materialul de bază folosind metode tradiționale (ore auditoriale sub formă de seminare). Problema poate fi soluționată dacă toți studenții vor urma o pregătire prealabilă înainte de însușirea compartimentelor de bază în mod obișnuit, conform programului de ore auditoriale. Drept rezultat ar avea loc uniformizarea competențelor indiferent de nivelul lor inițial.

Pentru a rezolva această problemă, la primele ore de matematică din universitate se efectuează un test de nivel diagnostic pentru cursul liceal de matematică, care permite determinarea calității cunoștințelor, aptitudinilor și abilităților absolvenților înmatriculați. La această etapă sunt identificați și studenții profilului umanist. Acest test se desfășoară în funcție de unitățile de conținut care sunt cele mai solicitate la studierea capitolelor de matematică superioară pentru specialitatea corespunzătoare. Testul oferă sarcini de două niveluri: A (nivel inițial) și B (nivel de profil). La efectuarea testului de nivel diagnostic, analiza rezultatelor testului permite profesorului să identifice nivelul de pregătire al fiecărui student, iar studenților le oferă posibilitatea de a-şi cunoaște propriile abilități (individuale) și lacune în cunoștințe.

Pe viitor, pentru lichidarea lacunelor în subiectele de bază, se propune utilizarea metodei „sarcinilor demonstrative” [2]. Metoda „ sarcinilor demonstrative” este o variantă de utilizare a principiului simplificării maxime a obiectului studiat, aplicat de cercetători. Conform acestei metode, pentru a studia principalele proprietăți ale obiectului de studiu, trebuie neglijate celelalte proprietăți ale acestuia, focalizându-și atenția pe aspectele considerate relevante pentru cercetător. Anume astfel, cu ajutorul sarcinilor demo de un nivel crescând de complexitate pot fi studiate principalele compartimente ale matematicii universitare. Întrucât nu sunt prevăzute ore special repartizate pentru repetare, studenții insuficient pregătiți la primele lecții de matematică primesc un „simulator” – un set de exerciții pentru a dezvolta anumite aptitudini și abilități specifice perioadei de studiu anterioare. Acest complex este însoțit de publicații de referință special concepute. Sarcinile simulatorului sunt menite să asigure un nivel de bază inițial. Acest nivel permite crearea bazelor pentru o continuare cu succes a studiului disciplinelor matematice universitare. Studenții rezolvă probleme simple de un anumit tip – „sarcini demonstrative” (sarcini demo). Astfel de sarcini ar trebui să fie cât mai simple posibil, să se refere la un subiect restrâns de matematică (și, prin urmare, să aibă același algoritm de rezolvare). Subiectele sarcinilor ar trebui să fie de bază: înmulțirea matricei, găsirea matricei inverse, calcularea limitelor, găsirea derivatei, calcularea integralelor nedefinite etc. Conținutul orelor pregătitoare (tematica acestora și seturile corespunzătoare de sarcini demonstrative) este coordonat în detaliu cu programa orelor viitoare din cursul de bază de matematică. Utilizarea unui set de sarcini demo va permite studenților de la profilul umanist să dobândească rapid competențe în rezolvarea problemelor de nivel inițial, iar apoi,

© Solovei Lilia, 2022

complicându-le, să-și aprofundeze competențele la secțiunea de matematică de care au nevoie.

Ca rezultat pe platforma educațională Moodle este plasat cursul intitulat *Capitole speciale de Analiză matematică și Algebră*. Acest curs prezintă câteva capitole ale matematicii care stau la baza înțelegerii și formării competențelor necesare pentru însușire cu succes cursurilor tehnice și de specialitate. Cursul conține materialul informativ, seturi de „sarcini demonstrative" și teste de autoevaluare la următoarele unități de conținut: matrice, operații cu matrice, calculul matricei inverse; limite de funcții, cazuri exceptate la operații cu limite de funcții, limite remarcabile; funcții derivabile, aplicații ale derivatelor; primitiva, integrala nedefinită; integrala definită, aplicații.

Aplicarea metodei „sarcinilor demonstrative" contribuie la adaptarea studenților din primul an la studiile universitare, direcționează procesul de studii nu numai spre asimilarea informațiilor, ci și spre formarea independenței studenților, creșterea motivației lor personale și formarea culturii matematice. Cu cât funcția, care la început este împărțită între profesor și elev, tinde să devină o funcție ce aparține cu precădere elevului, cu atât mai mult actul de instruire înclină să se convertească într-unul de autoinstruire [3]. Rezultatul pregătirii este evaluat nu prin cantitatea de informații comunicate, ci prin calitatea asimilării acestora și prin dezvoltarea abilităților studentului pentru instruire independentă ulterioară.

Bibliografie

1. *Matematică: Curriculum Național: Clasele 10-12: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare*. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova; coordonatori: Cutasevici A., Crudu V., Ceapa V. Chișinău: Liceum, 2020.
2. ROGACHEVSKIJ, A.G. Organizatsiya i metodika provedeniya podgotovitelnyh zanyatiy po vysshey matematike dlya studentov pervyh cursov tehnicheskih vuzov. În: *Vestnik KGPU*. Disponibil la: https://cyberleninka.ru/article/n/organizatsiya-i-metodika-provedeniya-podgotovitelnyh-zanyatiy-po-vysshey-matematike-dlya-studentov-pervyh-kursov-tehnicheskih-vuzov, 2018
3. CERGHIT, I. *Metode de învățământ*. Iași: Polirom, 2006.

© Solovei Lilia, 2022

CZU: 37.037:51

DEZVOLTAREA ABILITĂȚILOR DE MODELARE MATEMATICĂ

Marcel TELEUCA
Larisa SALI
Antonina CHOBAN-PILETSKAYA
Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: larisa.sali2018@gmail.com, mteleuca@gmail.com, antonina.ch.piletskaia@gmail.com

Rezumat. In articol sunt examinate unele aspecte ce țin de modelarea matematică din perspectiva educațională. În particular, sunt precizate etapele unui proces de soluționare a unei probleme reale prin metoda modelării matematice și sintetizate într-o diagramă. Sunt expuse concluziile autorilor vis-a-vis de familiarizarea elevilor și profesorilor cu metoda modelării matematice.
Cuvinte cheie: model matematic, curriculum, competență specifică, metodă, problemă.

Abstract. In this article some aspects related to mathematical modelling from an educational perspective are examined. In particular, the stages of a process of solving a real problem by the method of mathematical modelling are specified and synthesized in a diagram. The authors' conclusions regarding the familiarization of students and teachers with the mathematical modelling method are presented.
Keywords: mathematical model, specific competence, curriculum, problem.

Un model matematic este o descriere a unui sistem folosind conceptele și limbajul matematic. Procesul de dezvoltare a unui model matematic este denumit modelare matematică. Modelele matematice se pot constitui în sisteme dinamice, modele statistice, ecuații diferențiale, modele ale teoriei jocurilor sau diverse combinații ale lor, implicând o varietate de structuri abstracte.

Modelarea matematică se concentrează pe aplicarea conceptelor algebrice, geometrice, din analiza matematică, statistice și de probabilitate, la experiențe din lumea reală. Calitatea unui domeniu științific depinde de cât de bine armonizează modelele matematice ale teoriei domeniului respectiv cu rezultatele experimentelor repetabile.

În literatură sunt descrise diverse tipuri de modele matematice: liniare și non-liniare; statice și dinamice; explicite și implicite; discrete și continue; deterministe și probabiliste (stocastice); deductive, inductive sau variabile (flotant); strategice și non-strategice.

Modelele raționale sunt derivate din inferențe logice bazate pe observație, teorie și lansarea de ipoteze despre comportamentul componentelor fizice ale unui sistem, în timp ce modelele empirice reflectă principalele caracteristici ale datelor disponibile. Domeniile importante de aplicare a modelelor includ măsurarea, colectarea de date, diagnosticarea, predicția, planificarea și evaluarea măsurilor de prevenire și control, analiza cost-beneficiu, evaluarea riscurilor și maximizarea eficacității operațiunilor.

© Teleuca Marcel, Sali Larisa, Choban-Piletskaya Antonina, 2022

În educația matematică elementele de modelare matematică sunt menite să consolideze abilitățile de calcul, să aprofundeze înțelegerea ideilor cheie și a strategiilor de soluționare a unor probleme, să contribuie la extinderea cunoștințelor printr-o varietate de aplicații, la dezvoltarea fluenței computaționale ș.a. Interesul recent pentru modelarea matematică a fost stimulat de studiul PISA al OCDE, care are drept scop evaluarea gradului de alfabetizare matematică a elevilor.

Autorii publicației [2] consideră necesar a răspunde la întrebările:

(1) Dacă privim modelarea matematică ca un proces bidirecțional de transfer între lumea reală și matematică, care sunt caracteristicile sale esențiale?
(2) Care dintre aceste caracteristici esențiale diferențiază modelarea matematică de rezolvarea problemelor din matematica școlară?
(3) Din punctul de vedere al unui practician al modelării matematice, care sunt competențele și caracteristicile esențiale ale gândirii care trebuie dezvoltate la elevi pentru a le permite să devină modelatori matematici competenți?

Cercetătorii recomandă examinarea procesului de formare a abilității de modelare matematică din următoarele perspective: matematic, cognitiv, curricular, instrucțional și al formării profesorilor școlari.

În lucrarea [3] se constată că atunci când modelarea este examinată din perspectivă cognitivă, accentul se pune pe procesele de gândire individuale care sunt exprimate, în principal, prin anumite acțiuni verbale și non-verbale în combinație cu soluții scrise în timpul activităților de modelare ale indivizilor (inclusiv profesorilor).

Este oare posibil sau este oare necesar să se identifice un core curriculum referitor la modelarea matematică în cadrul curriculumului matematic general?

În curriculum-ul la matematică pentru liceu aprobat în Republica Moldova în lista de valori și atitudini figurează *formarea obișnuinței de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme în situații reale și/sau modelate* [5].

În afară de aceasta, doar pentru profilul umanist este inclusă următoarea competență specifică: *Investigarea seturilor de date, folosind instrumente, inclusiv digitale, și modele matematice, pentru a studia/explica relații și procese, manifestând perseverență și spirit analitic* [5, p. 10].

Din punct de vedere al instruirii se cere a preciza răspunsul la întrebările:

- Care sunt conținuturile relevante pentru a forma competențele specifice corelate cu modelarea matematică?
- Cum trebuie să fie construit discursul cadrului didactic în acest context?
- Care este volumul de timp necesar pentru realizarea sarcinilor ce vizează dezvoltarea competențelor specifice corelate cu modelarea matematică?
- Cum vom evalua dacă elevul deține competența?

© Teleuca Marcel, Sali Larisa, Choban-Piletskaya Antonina, 2022

În curriculumul pentru liceu la unele unități de conținut sunt prescrise unități de competențe care vizează procesul de modelare:

1. Modelarea unor situații practice, a unor procese reale, inclusiv din domeniul economic sau tehnic, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală.
2. Modelarea geometrică a unor situații cotidiene și/sau din alte domenii, inclusiv utilizând dreptele, ecuațiile dreptelor.
3. Modelarea unor situații cotidiene simple prin intermediul funcțiilor, ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor studiate și rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor obținute [5, p. 61].
4. Modelarea unor situații practice, a unor procese reale, inclusiv din domeniul economic, antreprenorial, tehnic, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală.
5. Modelarea, folosind materiale adecvate, a unor poziții relative ale punctelor, ale dreptelor, ale figurilor în plan și spațiu, ale planelor în spațiu în contextul relației de perpendicularitate în spațiu.
6. Modelarea transformărilor geometrice în spațiu, utilizând diverse materiale adecvate, inclusiv a unor situații reale și/sau modelate [5].

În opinia noastră, aceste unități de competență se referă la două semnificații ale termenului „modelare”. Primele patru unități de competență din lista de mai sus se referă la metoda modelării matematice, iar ultimele două se referă la elaborarea (construirea, confecționarea) unor mostre care ar putea servi drept mijloace didactice pentru demonstrarea/vizualizarea spațială a situațiilor descrise.

În ce privește profesorii de matematică, este incontestabil rolul lor în stimularea însușirii de către elevi a metodei modelării matematice și a dezvoltării competențelor matematice prin implementarea acestei metode la clasă. Dar este important ca profesorii să fi fost implicați în soluționarea unor probleme autentice prin implementarea metodei modelării matematice, să dețină cunoștințe privind aplicarea metodei, să-și dezvolte continuu abilitățile didactice în vederea familiarizării elevilor cu procesul de modelare matematică la nivel teoretic și practic.

În opinia noastră, familiarizarea cu metoda modelării matematice, ca metodă științifică de studiere a realității, poate fi natural corelată cu implementarea metodei didactice – metoda proiectului și cu abordarea STEM în educație, deoarece aplicarea metodei modelării matematice va presupune neapărat luarea în considerare a diferitor aspecte interdisciplinare. Cel puțin încă două aspecte trebuie ținute în evidență: 1) utilizarea tehnologiilor informaționale la toate etapele de implementare a metodei modelării matematice și 2) organizarea/orchestrarea procesului de executare a sarcinilor

© Teleuca Marcel, Sali Larisa, Choban-Piletskaya Antonina, 2022

de către elevi, pentru a simula procesul de modelare matematică pentru rezolvarea unor probleme reale.

Aspectele didactice privind particularitățile familiarizării elevilor cu metoda modelării matematice sunt prezentate în [6].

Viziunea noastră privind structura procesului de modelare matematică este prezentată în Figura 1.

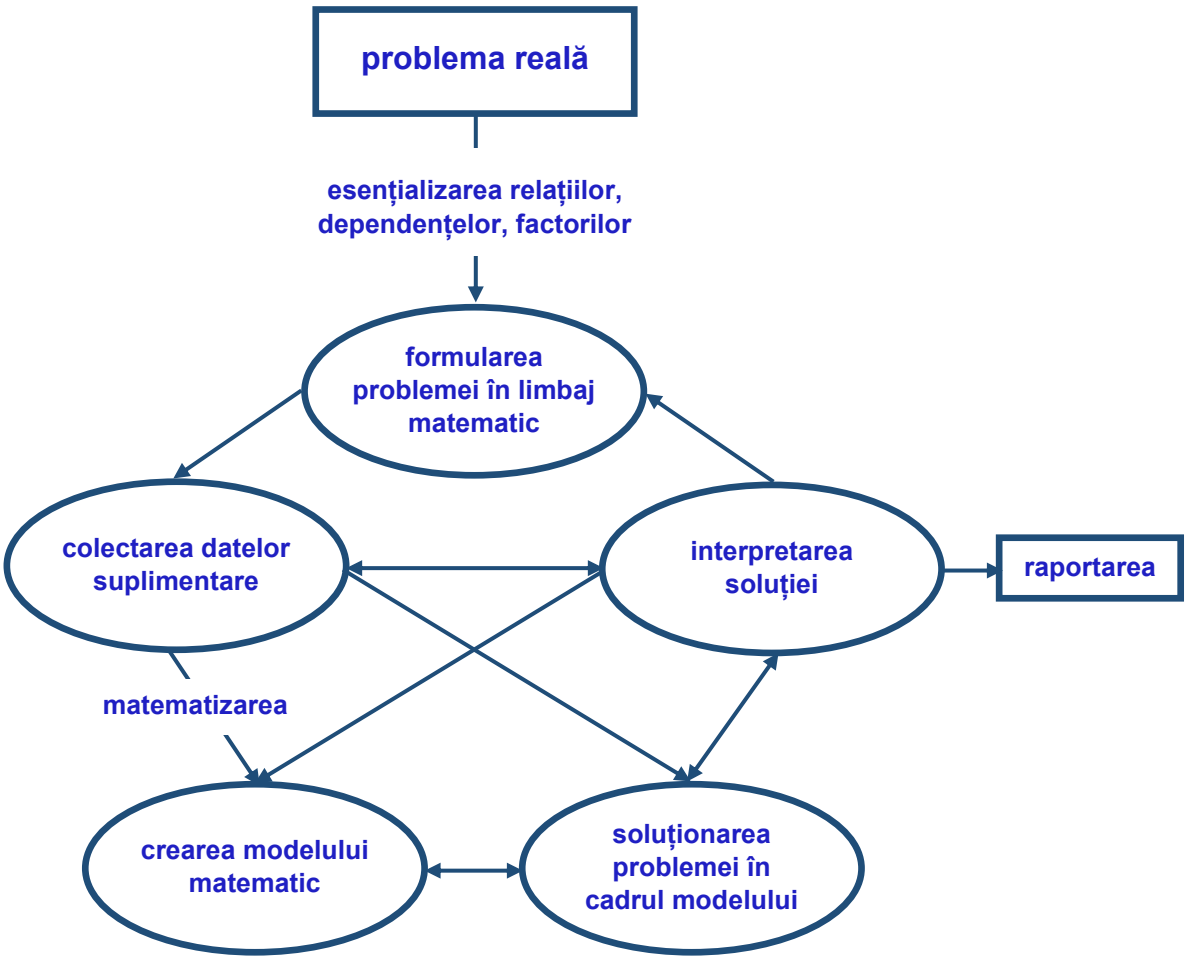


Figura 1. Etapele procesului de modelare matematică

Tabelul de mai jos include o sinteză a proceselor, etapelor și a unor acțiuni care vizează modelarea matematică.

Procese	Etape	Acțiuni
Problema reală		Comunicarea cu partea interesată în rezolvarea problemei. Stabilirea scopului și a obiectivelor.
Modelarea matematică	Formularea problemei în limbaj matematic	Stabilirea dependențelor între parametrii prezentați explicit. Identificarea unor factori ascunși. Decizia cu privire la tipul modelului adecvat situației.
	Colectarea datelor	După necesitate: observarea, experimentul, măsurări, stabilirea priorităților etc.
	Elaborarea	Prelucrarea bazelor de date.

	modelului	Stabilirea fundamentelor teoretice matematice și de specialitate: concepte, relații, Stabilirea limitelor și restricțiilor Elaborarea schemelor-bloc, a algoritmilor, programelor etc. Formalizarea/transcrierea problemei în limbaj matematic.
	Soluționarea problemei în cadrul modelului	Rezolvarea analitică/sintetică a problemei. Executarea programelor. Selectarea soluțiilor adecvate.
	Interpretarea soluției	Analiza rezultatelor. Vizualizarea în mediul real de proveniență a problemei. Validarea soluției
Raportarea		Descrierea rezultatelor în limbaj accesibil solicitantului. Analiza rezultatelor. Formularea de recomandări.

Cadrul didactic care își asumă familiarizarea elevilor cu modelarea matematică va trebui să-și dezvolte continuu abilități complexe pe mai multe paliere: din perspectiva matematică, ele vor ține de compartimentele de bază (algebra liniară; analiza numerică; statistică matematică și probabilitate; geometrie, inclusiv computațională; analiză matematică, calcul diferențial și integral; analiza funcțională; algoritmizare non-numerică ș.a.); din perspectiva metacognitivă ele vor fi orientate atât spre realitate, cât și către matematică (stabilirea de inferențe logice; gândire inductivă (observațională); analogie; clasificare; ordonare, seriere; formulare de obiective; prioritizare; a observa pattern-uri spațiale ancorate în timp în lumea reală; gândire translațională; formularea ipotezelor despre realitate pentru a elabora un model matematic).

Drept strategie comportamentală pentru cadrele didactice și elevi poate servi următoarea: priviți (studiați) cum modelează alții în situații similare. Exemplele de aplicare a metodei modelării matematice în procesul educațional nu sunt foarte răspândite. În Ghidul pentru implementarea curriculumului este invocat conceptul de modelare matematică în legătură cu rezolvarea unei probleme al cărei enunț se referă la dezvoltarea bacteriilor Escherichia coli [5, p. 151]. De fapt, autorii prezintă o problemă matematică simplă, care presupune aplicarea conceptului de progresie geometrică.

Particularități ale procesului de modelare matematică corelate cu procesul educațional corespunzător și exemple concrete pot fi examinate în publicațiile [1 – 4].

Concluzii

Modelarea matematică ar trebui predată sub formă de demonstrații sau prin prezentarea de exemple în clasă.

Programele de formare inițială și continuă a cadrelor didactice trebuie să includă dezvoltarea abilităților de modelare matematică și implicarea în procese autentice de soluționare a problemelor reale folosind metoda modelării matematice.

Prin asigurarea respectării principiului interdisciplinarității și utilizarea metodei de predare-învățare-evaluare prin proiecte pot fi dezvoltate la elevi competențele care vizează însușirea metodei modelării matematice.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. ASEMPAPA, R. S.; STURGILL, D.R. Mathematical Modeling: Issues and Challenges in Mathematics Education and Teaching. In: *Journal of Mathematics Research*. Published by Canadian Center of Science and Education; Vol. 11, No. 5; October 2019.
2. BORROMEO FERRI, R. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behaviour. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 2010. nr. 31(1), p. 99-118.
3. CAI, J.; CIRILLO, M.; PELESCO, J. and other. Mathematical modeling in school education: mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives. In: *Proceedings of the 38th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, Canada: IGPME, 2014.
4. FETHI, B.; ABDERRAZZAK, B. A.; FAYÇAL, B.; RABAB B. H. Modelling and optimization for improving the performance of agri-foods supply chain for milk products. In: *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2022. vol. 16, p. 83-88.
5. Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova. *Curriculum naţional: Matematică. Clasele 10-12. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Chişinău: Lyceum, 2020. 192 p.
6. ЛЯЩЕНКО, Е. *Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики*. М., 1988. 223 с.

© Teleuca Marcel, Sali Larisa, Choban-Piletskaya Antonina, 2022

CZU: 514.01

ON THE PYTHAGOREAN m–TUPLES

Boris ȚARĂLUNGĂ
Ion Creangă State Pedagogical University, Chișinău, Republic of Moldova
e-mail: taralunga.boris@upsc.md

In this notes we study of the Pythagorean m-tuples.A Pythagorean m-tuple is a m – tuples of integers $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$, whit $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 = x_m^2$. A Pythagorean m – tuples is called primitive, if the greatest common divisor of number $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m) = 1$.

In papers [1, 2] is investigate the Pythagorean 3-tuples, 4-tuples and 5-tuples.

Case 1. $m = 2n, n \geq 2$. Then the primitive Pythagorean m – tuples have of the form:

$$x_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{2n-2}^2 - u_{2n-1}^2 - u_{2n}^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{2k} = 2u_k u_{2n-1} + 2u_{2n-k-1}u_{2n}, \qquad x_{2k+1} = 2u_k u_{2n} - 2u_{2n-k-1}u_{2n-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{2n} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{2n-1}^2 + u_{2n}^2.$$

Then all Pythagorean m – tuples have of the form:

$$x_1 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{2n-2}^2 - u_{2n-1}^2 - u_{2n}^2)r,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{2k} = (2u_k u_{2n-1} + 2u_{2n-k-1}u_{2n})r, \qquad x_{2k+1} = (2u_k u_{2n} - 2u_{2n-k-1}u_{2n-1})r,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{2n} = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{2n-1}^2 + u_{2n}^2)r,$$

where $r \in \mathbb{Z}$, $u_i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2, \dots, n-1\}$.

Case 2. $m = 2n + 1, n \geq 1$. Then the primitive Pythagorean m – tuples have of the form:

$$x_1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{2n-1}^2 - v_{2n}^2, \quad \dots, \quad x_t = 2v_1 v_t,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{2n+1} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{2n-1}^2 + v_{2n}^2.$$

The all Pythagorean m – tuples have of the form:

$$x_1 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{2n-1}^2 - v_{2n}^2)s, \quad \dots, \quad x_t = 2v_1 v_t s,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{2n+1} = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{2n-1}^2 + v_{2n}^2)s,$$

where $s \in \mathbb{Z}, v_t \in \mathbb{Z}, t \in \{2, \dots, 2n\}$.

Bibliography

1. CARMICHAEL, R.D. *Diophantine analysis*. New-York: John Wiley and Sons, 1915.
2. ȚARĂLUNGĂ, B.; DRUC, T. Asupra unei ecuații Diofant. In: *CAIM 2018, Book of Abstracts*, Chișinău, 20-23 September, 2018. pp. 136-137.

© Taralunga Boris, 2022

CZU: 511.528

INTEGRAL SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATIONS $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ AND $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{3}$

Boris ȚARĂLUNGĂ[1],
Valentina BORDAN[2]
[1] *Ion Creangă State Pedagogical University*
[2] *Principesa Natalia Dadiani Public Institution Theoretical High School*
Chișinău, Republica of Moldova
e-mail: taralunga.boris@upsc.md, bordan.valentina@chisinau.edu.md

In 1948, Erdos and Straus [1] have conjectured that for each $n \geq 2$, the Diophantine equation

$$\frac{1}{x}++\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{n}.$$

has a positive integral solution (x, y, z), where $x \neq y, y \neq z, z \neq x$.

In 2013, Rabago, J.F.T. and Tagle, R.P [2], studied on the Diophantine equation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

In 2019, Pakapongpun A. [3], determine all positive integral solutions of the Diophantine equation

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{2}.$$

In this paper we try solve for all positive integral solutions of the Diophantine equations

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}++\frac{1}{z}=\frac{1}{3},$$

and

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{3}.$$

Bibliography

1. ELSHOLTZ, C. Sums of k Unit fraction. In: *Transaction of The American Mathematical Society*, 353(8), p. 3209-3227.
2. RABAGO, J.F.T.; TAGLE, R.P. On the Areas and Volume of a Certain Regular Solid and the Diophantine Equation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. In: *Note on number Theory and discrete Mathematics*, 19(3), 2013. p. 28-32.
3. PAKAPONGPUN, A. Integral solution of the Diophantine Equation $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{2}$. In: *International Journal of Pure and Applied mathematics*, 64(699), 2019. p.36-43.

© Taralunga Boris, Bordan Valentina, 2022

CZU: 511.528

A NOTE ON TWO DIOPHANTINE EQUATIONS $3^x + 22^y = z^2$ AND $3^x + 33^y = z^2$

Boris ȚARĂLUNGĂ
Lidia MUȘINSCHI
[1] *Ion Creangă State Pedagogical University, Chișinău, Republic of Moldova*
[2] *Andrei Vartic Theoretical High School, Ialoveni, Republica of Moldova*
e-mail: taralunga.boris@upsc.md, lidia.zdragat@mail.ru

In number theory the Diophantine equations is studied, equations in which only integer solutions are permitted. The famous general equation $a^x + b^y = z^2$ has many forms. The literature contains a very large number of articles on non – linear such individual equations [1-6].

In this paper, we solve of the Diophantine equations $3^x + 22^y = z^2$ and $3^x + 33^y = z^2$, where x, y, z are non - negative integer numbers.

Theorem 1. The Exponential Diophantine equation $3^x + 22^y = z^2$ has exactly four non - negative integer solutions {(1,0,2),(1,1,5), (3,1,7), (7,1,47)}.

Theorem 2. The Exponential Diophantine equation $3^x + 33^y = z^2$ has exactly two non - negative integer solutions {(1, 0, 2), (1,1,6)}.

Bibliography

1. CHOTCHAISTHIT, S. On the Diophantine equation of $2^x + 11^y = z^2$. In: *Maejo Int. J. Sci. Technol.*, Vol.7, No.2(2013). pp. 291-293.
2. MIHAILESCU, P. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. In: *Journal Reine Angew. Math,* 572(2004). pp.167-195.
3. RABAGO, J. On two Diophantine equations $3^x + 19^y = z^2$ and $3^x + 91^y = z^2$. In: *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, Vol. 3, Nr. 1(2013). pp. 28-29.
4. SARANYA, R.; JANAKI, G. On the Exponential Diophantine Equation $36^x + 3^y = z^2$. In: *International Research Journal of Engineering and Technology* (IRJET), Vol. 04, Nr. 11(2013). pp.1042-1044.
5. SHIVANGI, A.; SINGH, M.M. On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 114, Nr. 2(2017). pp.301-304.
6. SROYSANG, B. On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 81, Nr. 4(2012). pp.605-608.

© Taralunga Boris, Musinschi Lidia, 2022

CZU: 37.016:51

UNELE PROCEDEE DE CALCUL ALE LIMITELOR

Alina ȚURCANU
Universitatea Tehnică din Moldova
e-mail: alina.turcanu@mate.utm.md

Rezumat. În lucrare sunt studiate o serie de exemple de calculare a limitelor, fiind folosite anumite procedee.
Cuvinte cheie: matematică, funcție, limită, serie, serie Laurent, regula lui L'Hospital, metoda logaritmării.

Abstract. A series of examples of limit calculation are studied in the paper, using some methods.
Keywords: mathematics, function, limit, series, Laurent series, L'Hospital's rule, logarithm method.

1. *Seriile Laurent* (Pierre Laurent (1813-1854), matematician francez)

La calculul unor limite, deseori se poate obține o simplificare semnificativă, dacă se apelează la substituirea unor funcții cu primii termeni ai seriei Laurent ($\propto \in \mathbb{R}$, $x \to 0$):

1. $sin \propto x \sim \propto x \sim \propto x - \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
2. $tg \propto x \sim \propto x + \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
3. $arc\,sin \propto x \sim \propto x + \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
4. $arc\,tg \propto x \sim \propto x - \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
5. $cos \propto x \sim 1 - \frac{\propto^2 x^2}{2!}$.
6. 1- $cos \propto x \sim \frac{\propto^2 x^2}{2!}$.
7. $e^{\propto x} \sim 1 + \propto x$.
8. $a^{\propto x} \sim 1 + \propto \cdot \ln a \cdot x$.
9. $\ln(1 + \propto x) \sim \propto x$.
10. $log_a(1 + \propto x) \sim \frac{\propto x}{\ln a}$.
11. $\sqrt[n]{1 + \alpha x} \sim 1 + \frac{\propto x}{n}$.

Menționăm, că în unele cazuri, se apelează la mai mulți termeni ai seriei. De exemplu, în expresia $\sin x - x + \frac{x^3}{6}$ ($x \to 0$), funcția $\sin x$ se cere a fi substituită cu trei termeni ai seriei Laurent: $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ și atunci $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \sim \frac{x^5}{5!}$.

Exemple. Să se calculeze următoarele limite:

1.1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{5x^2 - 2\sin 3x^2} = \left(\frac{0}{0}, \cos 2x \sim 1 - \frac{4x^2}{2!}, \sin x \sim x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{4x^2}{2!} - 1}{5x^2 - 6x^2} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x^2}{-x^2} = 2.$$

Răspuns: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin 3x} = 2.$

1.2. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}, e^{x^2} \sim 1 + x^2, \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!}, \sin x \sim x\right) =$$

© Turcanu Alina, 2022

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 - 1 + \frac{x^2}{2!}}{x^2} = 1{,}5.$$

Răspuns: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = 1{,}5.$

1.3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)} = \left(\frac{0}{0}, \sqrt[3]{1+x} \sim 1 + \frac{x}{3}, \sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x\right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x}{3} - 1 - x}{x} = -\frac{2}{3}.$$

Răspuns: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)} = -\frac{2}{3}.$

2. *Regula lui L'Hospital* (Guilaume François de L' Hospital (1661-1704) matematician francez)

Acest procedeu se aplică la nedeterminări de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ și $\frac{0}{0}$.

Teoremă. Fie că $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ este o nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ și există $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Atunci $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemple. Să se calculeze următoarele limite:

2.1. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos 2x - 1)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin 2x}{3 \cos 3x} = 0.$

Răspuns: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin 3x} = 0.$

2.2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - \cos x)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{2 \sin x \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(2xe^{x^2} + \sin x\right)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + \cos x}{2 \cos 2x} = 1{,}5.$$

Răspuns: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = 1{,}5.$

2.3. $\lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{1 - ctg\, \pi x}{\ln tg\, \pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{(1 - ctg\, \pi x)'}{(\ln tg\, \pi x)'} = \lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{\frac{\pi}{\sin^2 \pi x}}{\frac{1}{tg\, \pi x} \cdot \frac{\pi}{\cos^2 \pi x}} = \lim_{x \to \frac{1}{4}} ctg\, \pi x = 1.$

Răspuns: $\lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{1 - ctg\, \pi x}{\ln tg\, \pi x} = 1.$

2.4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x\right)'}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} - cosx}{\frac{1}{1+x}} = -\frac{2}{3}.$

Răspuns: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)} = -\frac{2}{3}.$

2.5. $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) = e^{\lim_{x \to \infty} ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} ln(e^x + x)} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{ln(e^x + x)}{x}} =$

© Turcanu Alina, 2022

$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{(x)'}{(e^x)'}}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}} = e.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\frac{1+x}{x}\right) = (\infty - \infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\frac{1+x}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1+x}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{x-1-x}{\frac{1+x}{x}\cdot x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{2}.$

3. *Metoda logaritmării.*

Unele nedeterminări de tipul 0^0, ∞^0, ∞^∞ și altele pot fi ridicate apelând la metoda logaritmării. Fie că $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ este o nedeterminare de tipul indicat. Notăm această limită cu b și logaritmăm ambii membri:

$\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = b$, $\ln b = \ln\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} =$ (deoarece funcția logaritmică este continue) $= \lim\limits_{x\to a}\ln[u(x)]^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} v(x)\cdot\ln[u(x)]$

și în rezultat se obține o nedeterminare de tipul $0\cdot\infty$.

Remarcă. Fie că $\lim\limits_{x\to a}u(x) = b$, iar $\lim\limits_{x\to a}v(x) = c$ și funcția u^v nu prezintă o nedeterminare în punctul a. Atunci $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = b^c$. Astfel $\ln b = \lim\limits_{x\to a} v(x)\cdot \ln u(x)$ sau $b = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\cdot\ln u(x)}$.

Exemple. Să se calculeze limitele:

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+5]{3n+4} = (\infty^0)$. Fie $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+5]{3n+4} = b$. Atunci:

$\ln b = \ln\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+5]{3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[2n+5]{3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+5}\ln(3n+4) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

(trecem la variabila continuă x și aplicăm regula L'Hospital) $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(3x+4)}{2x+5} =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(3x+4))'}{(2x+5)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2(3x+4)} = 0.$

Astfel, $\ln b = 0$. Deci $b = 1$.

Răspuns: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+5]{3n+4} = 1.$

3.2. $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2 + 2\sin x)^{4\,tg\,x} = (0^0)$. Fie $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2 + 2\sin x)^{4\,tg\,x} = b$. Atunci:

$$\ln b = \ln \lim_{x \to 0}(3x^2 + 2\sin x)^{4\,tg\,x} = \lim_{x \to 0} \ln(3x^2 + 2\sin x)^{4\,tg\,x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 4\,tg\,x \cdot \ln(3x^2 + 2\sin x) = tg\,x \sim x, 3x^2 + 2\sin x \sim 3x^2 + 2x =$$

$$4\lim_{x \to 0} \frac{\ln(3x^2+2x)}{\frac{1}{x}} = (\frac{\infty}{\infty}, \text{ aplicăm regula L'Hospital}) = 4\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(3x^2+2x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= 4\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(3x^2+2x))'}{(\frac{1}{x})'} = -4\lim_{x \to 0} \frac{(6x+2)x^2}{3x^2+2x} = -4\lim_{x \to 0} \frac{(6x+2)x}{3x+2} = 0.$$

Astfel, $\ln b = 0$, $b = 1$.

Răspuns: $\lim_{x \to 0}(3x^2 + 2\sin x)^{4\,tg\,x} = 1.$

3.3. $\lim_{x \to \infty}(2x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3x+5}} = (\infty^0)$. Fie $\lim_{x \to \infty}(2x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3x+5}} = b$. Atunci $\ln b = \ln \lim_{x \to \infty}(2x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3x+5}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x+5}\ln(2x^2 + 3x + 4) = (\frac{\infty}{\infty}$, aplicăm regula L'Hospital) $= \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln(2x^2+3x+4))'}{(3x+5)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x+3}{3(2x^2+3x+4)} = 0.$

Deci $\ln b = 0$, $b = 1$.

Răspuns: $\lim_{x \to \infty}(2x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3x+5}} = 1.$

3.4. $\lim_{x \to \pi/2}(1 - \sin x)^{tg\,x} = (0^\infty)$. Fie $\lim_{x \to \pi/2}(1 - \sin x)^{tg\,x} = b$. Atunci:

$$\ln b = \ln \lim_{x \to \pi/2}(1 - \sin x)^{tg\,x} = \lim_{x \to \pi/2} \ln(1 - \sin x)^{tg\,x} =$$

$$\lim_{x \to \pi/2} tg\,x = \lim_{y \to 0} tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \ln\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \lim_{y \to 0} ctg\,y\ \ln(1 - \cos y) =$$

$$\left(1 - \cos y \sim \frac{y^2}{2}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\ln\frac{y^2}{2}}{tg\,y} = -\infty.$$

Deci $\ln b = -\infty$, $b = 0$.

Răspuns: $\lim_{x \to \pi/2}(1 - \sin x)^{tg\,x} = 0.$

4. *A doua limită remarcabilă.* Fie $\lim_{x \to a} u(x) = 1$, $\lim_{x \to a} v(x) = \pm\infty$, unde a este un număr sau $a = \pm\infty$. Atunci $\lim_{x \to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}$.

Exemple. Să se calculeze limitele:

4.1. $\lim_{x \to 0}(\cos 2x)^{-\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \to 0}(\cos 2x - 1)\cdot\frac{(-1)}{x^2}} = \left(0 \cdot \infty, \cos 2x - 1 \sim \frac{x^2}{2}\right) =$
$e^{\lim_{x \to 0}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{(-1)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

Răspuns: $\lim_{x \to 0}(\cos 2x)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

© Turcanu Alina, 2022

4.2. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\ln(\frac{\pi}{2}-x)} = (1^{\infty}) = \left(y = \frac{\pi}{2} - x,\ \ x = \frac{\pi}{2} - y,\ \ x \to \frac{\pi}{2}\ ,\ \ y \to 0\right) =$

$\lim\limits_{y \to 0} \left(\sin(\frac{\pi}{2} - y)\right)^{\ln y} = \lim\limits_{y \to 0} (\cos y)^{\ln y} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{y\to 0}(\cos y - 1)\ln y} = \Big(\cos y -$

$1 \sim -\frac{y^2}{2}\Big) = e^{-\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{2}\right)\ln y} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln y}{\frac{1}{y^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{aplicăm regula L'Hospital}\right) =$

$e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{1}{y}}{\frac{2}{y^2}}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{2}} = e^0 = 1.$

Răspuns: $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\ln(\frac{\pi}{2}-x)} = 1.$

4.3. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x + tg\ x)^{\frac{1}{3x}} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x+tg\ x-1)\cdot\frac{1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(x+tg\ x)\cdot\frac{1}{3x}} = (\frac{\infty}{\infty},$

aplicăm regula L'Hospital) $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{cos^2 x}}{3}} = e^{\frac{2}{3}}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x + tg\ x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{2}{3}}.$

4.4. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \sin x)^{cosec\ x} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x-1)\cdot cosec\ x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x)\cdot\frac{1}{\sin x}} = e^{-1}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \sin x)^{cosec\ x} = e^{-1}.$

Bibliografie

1. BOTNARU, D. *Îndrumător la matematică.* Chișinău: Editura „Tehnica”, 2008.
2. MIRON, S. *Teoria limitelor și calculul diferențial.* Iași: Editura „Spiru Haret”, 2006.

© Turcanu Alina, 2022

CZU: 37.016:371.314.6

ASPECTE PRIVIND PROIECTAREA ȘI REALIZAREA PROIECTELOR STEAM

Teodora VASCAN
Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale, UST
e-mail: dvascan@gmail.com

Rezumat. Educația modernă se dezvoltă rapid. Printre aceste noi tehnologii sunt și proiectele STEAM, care în stadiul actual sunt incluse activ în practica sistemului educațional din Republica Moldova, începând cu vârsta preșcolară, educația primară, gimnazială și liceală. Abordarea STEAM este un fenomen educațional modern care dezvoltă elevilor abilitățile de a rezolva situații de viață non-standard, capacitatea de a vedea conexiuni interdisciplinare și de a le aplica în practică. În acest articol, vom descrie unele aspecte privind proiectarea și realizarea proiectelor STEAM și vom împărtăși experiența realizării proiectului STEAM „Expoziția fulgilor” în cadrul Workshop-ului „Tehnologii performante în educație”, care a avut loc pe data de 25 iunie 2022 în incinta Universității de Stat din Tiraspol.
Cuvinte cheie: abordarea STEAMS, educația STEAM, proiecte STEAM, conexiuni interdisciplinare.

Abstract. Modern education is developing rapidly. Among these new technologies are the STEAM projects, which at present are actively included in the practice of the education system in the Republic of Moldova, starting with preschool, primary, secondary and high school education. The STEAM approach is a modern educational phenomenon that develops students' abilities to solve non-standard life situations, the ability to see interdisciplinary connections and to apply them in practice. In this article, we will describe some aspects regarding the design and implementation of STEAM projects and we will share the experience of the STEAM project "Flake Exhibition" in the Workshop "Advanced Technologies in Education", which took place on June 25, 2022 at the Tiraspol State University.
Keywords: STEAMS approach, STEAM education, STEAM projects, interdisciplinary connections.

Situația actuală în domeniu

În educația STEAM se dezvoltă activ o direcție creativă, inclusiv discipline creative și artistice (design industrial, arhitectură și estetică industrială etc.). Conform metodologiei STEAM, accentul este pus pe o sarcină sau o problemă practică. Elevii învață să găsească soluții nu în teorie, ci prin încercare și eroare. În plus, încă din primele etape ale învățării, instrumentele specializate sunt utilizate în sala de clasă, de exemplu, programe pentru animație pe computer și servicii interactive în combinație cu o tablă interactivă.

Educația STEAM permite să integrăm mai multe discipline academice prin activități de proiect și să arătăm aplicarea lor în practică. De exemplu, studiul roboticii necesită cunoștințe aprofundate în matematică, informatică, tehnologie, fizică. Construind un robot de la zero, elevul caută modalități de a rezolva probleme non-standard prin acțiuni practice.

Introducerea abordării STEAM în Republica Moldova este plină de mari probleme printre care se enumeră:

© Vascan Teodora, 2022

- ✓ *Standardul nostru educațional este construit pe un concept complet opus*. Fiecare disciplină academică este o lume separată care trăiește în paralel cu celelalte și foarte rar se intersectează cu acestea. Educația STEAM este orientată spre lucrul colaborativ și integrarea diferitelor domenii în același timp.
- ✓ *Fără succesiune*. Educația în tehnologie și științe naturale ar trebui să înceapă de la grădiniță, să continue până la liceu și să se dezvolte în învățământul superior. Inginerii și oamenii de știință trebuie să fie educați încă din copilărie. Acesta este scopul educației STEAM.
- ✓ *Nu există o bază materială*. Educația STEAM implică un număr mare de ore de laborator și practice pentru realizarea cărora sunt necesare diverse echipamente și soft-uri specializate. De exemplu, „Setul complet pentru clasa LEGO Mindstorms EV3" (pentru 4 elevi) costă aproximativ 26 de mii de lei. „Constructorul electronic Technolab TR-0621- Nivel de cercetare" costă aproximativ 120 de mii de lei.

Prin intermediul proiectului de transformare digitală a educației „Clasa Viitorului", implementat în instituţiile educaţionale din Republica Moldova multe dintre instituții au fost dotate cu echipamentele necesare realizării educației STEAM, dar din păcate acestea sunt folosite doar pentru realizarea cercurilor de robotică sau alte activități extracuriculare și mai puțin în procesul educațional nemijlocit. Un alt aspect ce împiedică utilizarea acestei abordări în procesul educațional din Republica Moldova, este legat de pregătirea cadrelor didactice pentru realizarea activităților de tip STEAM, precum și utilizarea echipamentelor digitale moderne și a soft-urilor specializate.

Aspecte privind proiectarea activităților STEAM

Implementarea tehnologiilor STEAM la diferite niveluri de educație ar trebui să aibă propriile sale specificități, accentul fiind pus pe activități de proiectare, cercetare și joc, axate pe dezvoltarea independenței în căutarea soluțiilor la problemele vieții, proiectarea produselor de activitate în interacțiune. Atunci când se analizează fiecare componentă a STEAM, propunem să se formuleze întrebări cheie pentru profesori pentru a înțelege esența acestei abordări (Tabelul 1).

Mai multe detalii privind proiectarea lecțiilor și aproiectelor STEAM se conțin în lucrările [1] și [2]. De asemenea, în lucrările [3], [4] și [5] se prezintă unele aspecte ce țin de predarea Roboticii Educaționale și se prezintă o selecție de roboți educaționali care pot fi utilizați în predarea disciplinei Robotica Educațională și o descriere a mediului de programare Open Roberta Lab care permite studierea disciplinei menționate și fără prezența fizică a roboților.

Atunci când elevii rezolvă o cercetare, o problemă științifică în cogniție, profesorul trebuie să înțeleagă: care este obiectul cercetării, ce instrument de cunoaștere ar trebui utilizat (observare, experiență, excursie virtuală etc.), pentru ca elevii să descopere singuri

© Vascan Teodora, 2022

esența fenomenelor. La această etapă, elevii învață să construiască presupuneri, ipoteze, să formuleze întrebări problematice și să caute singuri răspunsuri la acestea. Acest proces modelează gândirea critică în viitor.

Tabelul 1. Întrebări cheie ale abordării STEAM

Acronimul	Disciplina	Întrebări cheie
S	Științe	Ce și cum cercetăm? Ce și cum studiem? Ce și cum știm?
T	Tehnologii	Ce tehnologii vor utiliza elevii pentru crearea produsului final? Care dintre aceste tehnologii le stăpânesc elevii și care nu?
E	Inginerie	Ce produs (proiect) vor crea elevii?
A	Arta	Ce mijloace artistice și expresive de artă stăpânește elevul? Ce metode de realizare creativă alege elevul?
M	Matematica	De ce elemente matematice are nevoie elevul pentru a realiza produsul? Ce elemente ale gândirii matematice se vor dezvolta (geometrice, spațiale, algoritmice, temporale, combinatorice etc.)?

Educația STEAM implică întotdeauna o activitate experimentală menită să rezolve o problemă reală. Munca în echipă, dialogul, cercetarea, experimentul, proiectarea, diverse activități au ca scop realizarea unui produs semnificativ pentru elevi [6].

Experiența din cadrul proiectului STEAM „Expoziția fulgilor”

Proiectul STEAM „Expoziția fulgilor” a fost realizat în cadrul workshop-ului „Tehnologii performante în educație” care s-a desfășurat pe 25 iunie 2022 în cadrul Universității de Stat din Tiraspol. Proiectul menționat a fost realizat în laboratorul „Inteligența artificială creativă”. La realizarea acestui proiect au participat atât cadre didactice din învățământul preuniversitar precum și cadre didactice din învățământul superior. Acest proiect STEAM a oferit oportunitatea de a adera la lumea celor cinci componente S-Științe, T-Tehnologii, E-Inginerie, A-Artă și M-Matematică și de a dobândi cunoștințele și abilitățile relevante, de a dezvolta abilități și competențe, inclusiv cele ale secolului 21: comunicare, lucru în echipă, gândire critică și creativă. S-a propus trecerea prin nivelurile adecvate și finalizarea sarcinile pe etape. Toate nivelurile au fost interconectate, deoarece, după ce s-a trecut unul, se dobândește „abilitatea” de a depăși cu succes următorul. La fiecare din etapele proiectului, s-au propus sarcini de o complexitate diferită, și anume:

☺ - „*Începător*” (sarcina este efectuată individual);

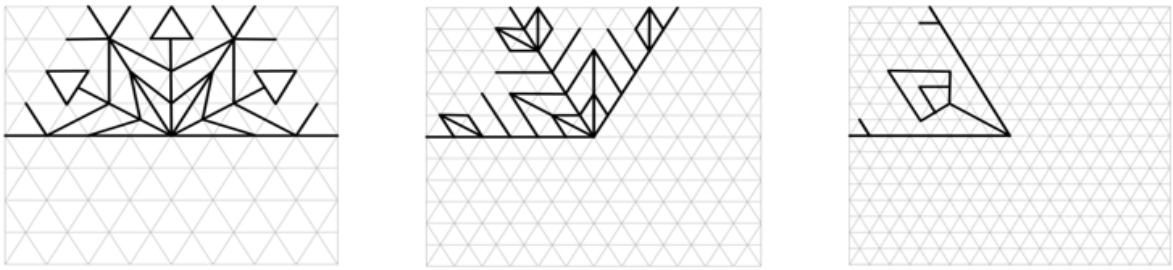
☺☺ - „*Intermediar*” (sarcina poate fi îndeplinită atât individual, cât și în echipă);

☺☺☺ - „*Expert*” (sarcina poate fi îndeplinită atât individual, cât și în echipă).

Nivelurile proiectului STEAM „Expoziția fulgilor” au fost următoarele:

- ✓ Nivelul *„Matematica”*. Acest nivel a fost realizat în 2 etape:

- Etapa 1 „*Cireașa în plan*” în cadrul căreia s-a propus de realizat următoarea sarcină: Sunt date coordonatele punctelor unei „cireșe” C = { (-5; -2), (-6; -2), (-7; -3), (-7; -5), (-6; -6), (-4; -6), (-3; -5), (-3; -3), (-4; -2), (-5; -2), (-5; -1), (0; 4), (-2; 4), (-4; 6), (-2; 6), (0; 4), (2; 6), (4; 6), (2; 4), (0; 4), (5; -1), (5; -2), (6; -2), (7; -3), (7; -5), (6; -6), (4; -6), (3; -5), (3; -3), (4; -2), (5; -2)}. Aranjați aceste puncte pe planul de coordonate și conectați-le cu segmente.
- În cadrul celei de-a doua etape „*Simetria în natură*” s-a făcut o incursiune în simetrie și apoi s-au propus sarcini de diversă complexitate (fig. 1).



complexitatea ☺ „*Începător*” complexitatea ☺☺ „*Intermediar*” complexitatea ☺☺☺ „*Expert*”

Figura 1. Sarcini pentru etapa a 2-a a nivelului Matematica

✓ Nivelul *„Programare. Cicluri”*. Acest nivel a fost realizat, de asemenea în 2 etape. La prima etapă, denumită „*Programați și jucați*”, a fost creat după model un joc în *Scratch*, aceasta fiind sarcina de complexitatea ☺ - „*Începător*”. Apoi s-a propus de modificat codul jocului utilizând bucla „*Repetă de ... ori*”, aceasta fiind sarcina de complexitatea ☺☺ - „*Intermediar*”. Pentru sarcina de complexitatea ☺☺☺ - „*Expert*” s-a propus utilizarea buclei *„Repetă până când ...”*. La cea de-a doua etapă a acestui nivel denumită „*Programez și desenez*” s-a făcut o incursiune în limbajul de programare *Python*, mai exact buclele utilizate de acesta. S-au propus următoarele sarcini:

- Sarcina de complexitatea ☺ - „*Începător*”: S-a propus de a desena o ramură a unui fulg utilizând biblioteca *Turtle* a limbajului *Python*. În figura 2 este prezentat un rezultat acestei sarcini.

Figura 2. Desenarea unei ramuri a fulgului de nea

- Pentru sarcina de complexitatea ☺☺ - „*Intermediar*” s-a propus de modificat codul pentru a obține fulgii prezentați în figura 3.
- Pentru sarcina de complexitatea ☺☺☺ - „*Expert*” s-a propus crearea unei funcții care va desena fulgul de nea a lui Koch.

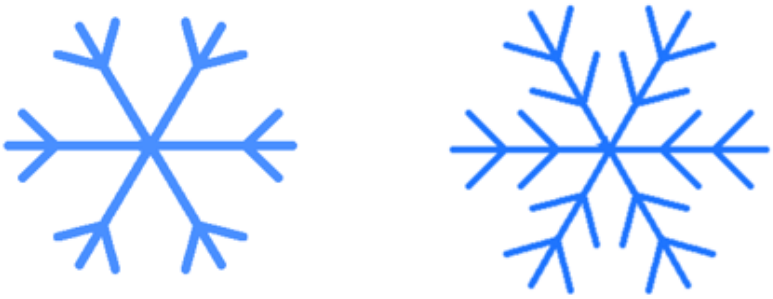


Figura 3. Fulgii pentru sarcina de complexitatea ☺☺ - „*Intermediar*”

✓ Nivelul „*Arta și Ingineria”*. La acest nivel au fost propuse următoarele sarcini:

- Pentru sarcina de complexitatea ☺ - „*Începător*” s-a propus crearea unui fulg din dulciuri. Un rezultat al acestei sarcini este prezentat în figura 4.

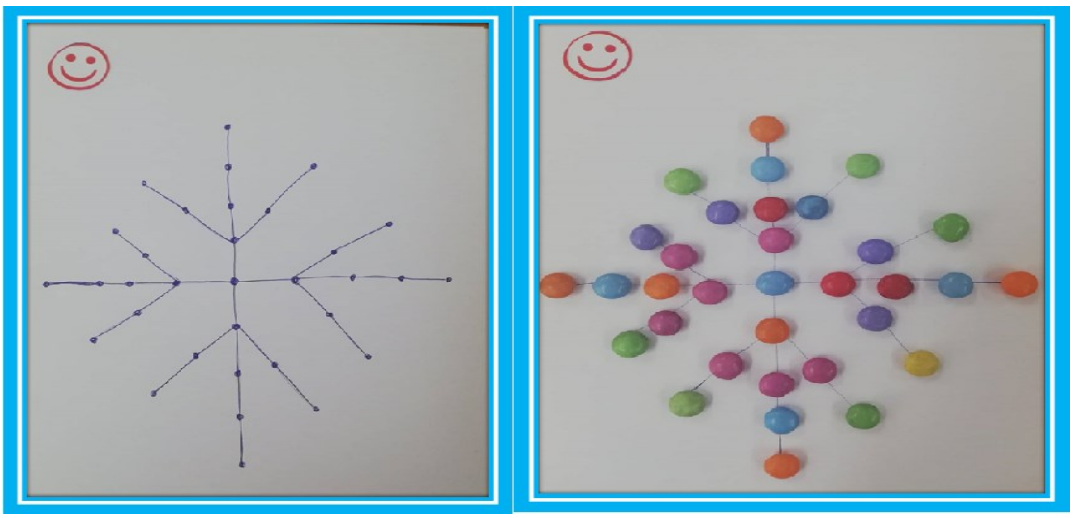


Figura 4. Crearea fulgului din dulciuri

- Pentru sarcina de complexitatea ☺☺ - „*Intermediar*” s-a propus de creat fulgi din hârtie iar pentru sarcina de complexitatea ☺☺☺ - „*Expert*” s-a propus de creat fulgi utilizând piese *Lego*.

Produsul final al acestui proiect a fost colajul de poze cu fulgii obținuți la toate etapele proiectului realizat cu ajutorul aplicației https://www.pizap.com/.

Pentru evaluarea produsului final s-a propus următoarea fișă de evaluare a colajului de poze prezentată în tabelul 2.

© Vascan Teodora, 2022

Tabelul 2. Fișă de evaluare a colajului de poze

Criterii	Nivel de performanță		
	Expert	**Intermediar**	**Începător**
Formatarea colajului de poze	Colajul este formatat corespunzător, într-un mod creativ	Colajul este formatat corespunzător, într-un mod obișnuit	Colajul nu corespunde cerințelor de formatare
Accesibilitatea conținutului	Gândurile sunt expuse clar, coerent, accesibile pentru beneficiari	Gândurile sunt expuse clar, parțial coerent, o parte din informație este accesibilă pentru beneficiari	Gândurile sunt expuse clar, lipsește coerența, unele idei sunt accesibile pentru beneficiari
Relevanța conținutului	Conținutul este relevant	O parte din conținut este relevant	Conținutul nu este relevant.
Prezentarea succintă a colajului	Colajul este prezentat în 5-6 enunțuri sau versuri, expuse coerent, în corespundere cu tematica propusă	Colajul este prezentat în 5-6 enunțuri sau versuri, expuse relativ coerent, în corespundere cu tematica propusă.	Colajul este prezentat în 5-6 enunțuri sau versuri, care redau parțial tematica propusă.
Originalitate	Colajul este realizat creativ, toate elementele sunt conexe între ele, vizualizarea lui inspiră la...	Colajul este realizat creativ, majoritatea elementelor au legătură între ele.	Colajul este realizat din mai multe elemente, care au o legătură între ele, dar nu se completează reciproc

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. VASCAN, T. Învățarea bazată pe proiecte – o metodă de implementare a abordării STEAM în educație, În: *Materialele Conferinței Republicane a Cadrelor Didactice*, 26-27 februarie 2022. Volumul I Didactica Științelor Exacte Universitatea de Stat din Tiraspol, pp. 324-329. Chișinău: Tipografia UST, 2022. ISBN 978-9975-76-382-0.
2. VASCAN, T. Sugestii de creare a lecțiilor STEAM, În: *Materialele Conferinței Republicane a Cadrelor Didactice*, Volumul I Didactica Științelor Exacte 26-27 februarie 2022 -Universitatea de Stat din Tiraspol, pp. 330-336, Chișinău: Tipografia UST, ISBN 978-9975-76-382-0.

© Vascan Teodora, 2022

3. VASCAN, T. Robotica în educația STEAM În: *Acta et Commentationes. Științe ale Educației. Revistă științifică* Nr.2(28) (2022). Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2022. ISSN 1857-0623. (Categoria B).
4. VASCAN, T. Promovarea educaţiei STEAM prin intermediul Roboticii Educaţionale. În: *Conferința științifică internațională „Abordări inter/ transdisciplinare în predarea științelor reale (concept STEAM)*", UST, 29-30 octombrie 2021, volumul I, pp. 330-335.
5. NABEEL, M.; LATIFEE, H. O., et all. Robotics Education Methodology for K-12 Students for Enhancing Skill Sets Prior to Entering University. In: *International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2017, pp. 1702–1707.
6. ЧЕЛЫШЕВА, Ю.В. STEAMS- среда и навыки будущего//STEAMS практики в образовании. În: *Сборник лучших STEAMS практик в образовании Часть 1.* ГАОУ ВО МГПУ, М: «Перо», 2021. с.13-15.

© Vascan Teodora, 2022

CZU: 347.78:82-995

DESPRE COMBATEREA PLAGIATULUI ÎN LUCRĂRILE ȘTIINȚIFICE

Tatiana VEVERIȚA
Catedra ITI, Universitatea de Stat din Tiraspol
e-mail: veveritat@gmail.com

Rezumat. Datorită creșterii fluxului informațional plagiatul a reușit să devină un fenomen cu impact negativ răspândit în întreaga societate. Poate fi uneori intenționat sau neintenționat, integral sau parțial, simplu sau autoplagiat, dar plagiatul, sub orice formă, este o problemă serioasă în cercetare și scriere științifică.
Lucrarea descrie conceptul de plagiat și diferitele sale tipuri, oferind unele sugestii importante pentru a evita acest fenomen în lucrările științifice într-un mod etic respectând munca altcuiva. Ea sugerează că toți cercetătorii, inclusiv studenții, masteranzii, autorii și recenzenții ar trebui să știe despre plagiat și cum poate fi evitat urmând îndrumările etice și utilizând software-uri de detectare a plagiatului.
Cuvinte cheie: dreptul de autor; drepturi conexe; plagiat.

Abstract. Due to the increase of information flow, plagiarism managed to become a negative phenomenon spread throughout society. It can sometimes be intentional or unintentional, full or partial, simple or self-plagiarized, but plagiarism, in any form, is a serious problem in research and scientific writing.
The paper describes the concept of plagiarism and its different types, offering some important suggestions to avoid this phenomenon in scientific works in an ethical way by respecting someone else's work. It suggests that all researchers, including students, masters, authors and reviewers, should know about plagiarism and how it can be avoided by following ethical guidelines and using plagiarism detection software.
Keywords: copyright; related rights; plagiarism.

Dreptul de autor este termenul juridic care „reglementează raporturile care apar la crearea și valorificarea operelor literare, artistice și științifice (dreptul de autor) și a interpretărilor, fonogramelor, videogramelor, emisiunilor organizațiilor de difuziune (drepturi conexe)” [1]. Drepturile de autor și drepturile conexe sunt concepute pentru a proteja proprietatea intelectuală a autorilor.

Respectarea dreptului de autor trebuie să fie o condiție firească a oricărui individ, inclusiv a studenților, masteranzilor, cercetătorilor. Datorită creșterii fluxului informațional plagiatul a reușit să devină un fenomen negativ răspândit în întreaga societate. Acest subiect devine intens discutat atât la nivel internațional, european, național, cât și instituțional.

Deosebim două tipuri de plagiat. El poate fi intenționat sau neintenționat.

Plagiatul intenționat se întâmplă atunci când cineva folosește munca sau ideea altcuiva în mod parțial sau integral fără a indica sursa originală. Astfel, plagiatul intenționat este o practică serioasă și lipsită de etică în lumea academică.

© Veverita Tatiana, 2022

Plagiatul neintenționat se consideră atunci când autorii fără experiență și abilități corespunzătoare se angajează în plagiat.

Indiferent dacă acesta este intenționat sau neintenționat, plagiatorul nu este agreat de comunitățile științifice deoarece copiază munca sau ideea altora fără acordul acestuia.

Atât plagiatul intenționat, cât și cel neintenționat pot avea una dintre următoarele forme:

- ✓ integrală;
- ✓ parțială;
- ✓ amestecată;
- ✓ deghizată;
- ✓ prin parafrazare;
- ✓ prin sintetizarea inadecvată a textului;
- ✓ auto-plagiere.

Reciproc, aceste forme de plagiat pot fi, de asemenea, fie plagiat intenționat, fie neintenționat.

În ultimii ani fenomenul plagiatului și a producerii lucrărilor la comandă a acaparat rețelele educaționale. Până în prezent nu au fost dezvoltate mecanisme de prevenire și combatere a acestui fenomen, însă multe instituții au întreprins careva măsuri pentru a-l diminua.

Pentru a evita furtul intelectual este important să înțelegem că există două tipuri de informații: informație generală cunoscută și alta este informația faptică.

Primul tip de informație nu trebuie citată deoarece informațiile găsite în surse generale sunt cunoscute de o mulțime de oameni și pot fi găsite în multe surse. De exemplu, informația de genul *„pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor”* este arhicunoscută și nu trebuie să fie citată în lucrare. În mod similar, *„pământul se rotește în jurul soarelui”* este cunoscută și poate fi găsită în multe surse generale diferite. Deci autorii trebuie să identifice ce informații sunt cunoscute și care nu.

Există și alte tipuri de informații care nu sunt considerate cunoscute și întotdeauna trebuie citate în lucrările academice. Dacă nu sunt citate, ele constituie plagiat. Informațiile faptice sunt descoperite de o anumită persoană, cum ar fi un cercetător și informația devine proprietatea intelectuală a acelei persoane. În acest caz, astfel de informații, inclusiv tabele, grafice sau imagini ar trebui să fie recunoscute într-un mod adecvat, astfel încât să se evite plagiatul.

Sunt diverse modalități de a evita plagiatul în lucrările științifice într-un mod etic respectând cu încredere munca altcuiva. Printre acestea menționăm:

Parafrazarea și citarea sursei: Parafrazarea este una dintre modalitățile simple de a evita plagiatul. Dacă informațiile disponibile sunt importante pentru lucrare, trebuie scrise cu propriile cuvinte și citată sursa originală într-un mod adecvat.

© Veverita Tatiana, 2022

Rezumarea și citarea sursei: Rezumatul este un alt mod simplu de a evita plagiatul. Autorii trebuie să fie suficient de eficienți pentru a rezuma informațiile disponibile și citarea corectă a sursei originale.

Includerea textului între ghilimele și indicarea sursei: Dacă autorii consideră o porțiune dintr-un text necesar în lucrare, textul copiat trebuie să fie introdus între ghilimele duble și să fie citată corect sursa originală.

Citarea materialelor proprii: Dacă autorii folosesc propria lor lucrare anterioară în lucrările științifice ar trebui să o citeze. Devine autoplagiat dacă informațiile sunt împrumutate de la propria lucrare anterioară.

Verificarea la antiplagiat utilizând instrumente online gratuite și contra plată: Tehnologia modernă permite utilizarea și reutilizarea materialelor online cu ușurință, dar, la fel, ea poate fi folosită și pentru a dezvolta instrumente software pentru detectarea plagiatului academic. Sunt diverse instrumente gratuite/comerciale și open-source de detectare a plagiatului disponibile online.

Pentru a combate fenomenul plagierii, începând cu anul 2019, în Universitatea de Stat din Tiraspol, toate lucrările științifice sunt supuse testării antiplagiat prin sistemul autorizat de Agenția Națională de Asigurare a Calității în Educație și Cercetare **sistemantiplagiat.ro**.

În tabelul 1 sunt reprezentate rezultatele lucrărilor supuse testării antiplagiat în cadrul Universității de Stat din Tiraspol.

Tabelul 1. Rezultatele lucrărilor supuse testării antiplagiat

Anul academic	Nr. total de lucrări	Nr. de lucrări acceptate	Nr. de lucrări respinse	% lucrărilor acceptate	% lucrărilor respinse
2019	141	64	77	45,39	54,61
2020	204	114	90	55,88	44,12
2021	244	148	96	60,65	39,35
2022	139	93	46	66,91	33,09

În diagrama 1 este prezentată rata promovării acestor lucrări.

Din această diagramă observăm o creștere substanțială a numărului de lucrări acceptate de sistemul antiplagiat. Prin urmare, a crescut calitatea lucrărilor și responsabilitatea autorilor.

© Veverita Tatiana, 2022

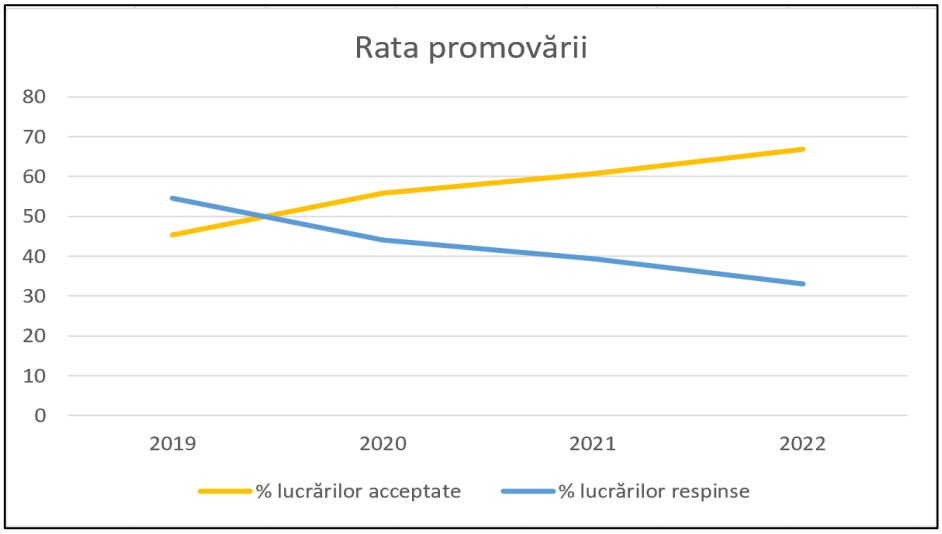


Diagrama 1. Rata promovării lucrărilor științifice

Astfel, enumerăm câteva metode de prevenire a metodei plagiatului, care și-au demonstrat eficienta fiind implementate în scrierea lucrărilor științifice în cadrul UST:

a) formarea la studenți, masteranzi și cercetători a Competenței și culturii digitale cu accent pe domeniul Drepturilor de autor și Licențe;
b) asumarea propriei răspunderi de către autori prin verificarea la antiplagiat utilizând instrumente online gratuite;
c) verificarea elementară ad-hoc prin consultarea serverelor de căutare (Google, Yandex, etc.) pentru conținuturile suspecte;
d) utilizarea softurilor antiplagiat comerciale (de exemplu sistemantiplagiat.ro);
e) stocarea în baze de date instituționale a lucrărilor;
f) indexarea lucrărilor științifice în baze de date internaționale (Web of Science, Scopus, DOAJ etc.);
g) evidența clară de către recenzenți și tutori a procesului de elaborare a tezelor de licență, master, doctorat, articole științifice, lucrări didactice.

Concluzii

1. Plagiatul este în primul rând o infracțiune morală, de aceea sentimentul responsabilității ține de atitudinea morală a fiecăruia.
2. Instituția trebuie să aibă o politică clară privind Drepturi de autor și Licențe. Aceasta poate include:
   - Training-uri de formare a Competenței și culturii digitale cu accent pe domeniul Drepturi de autor și Licențe;
   - regulamente instituționale privind scrierea lucrărilor științifice cu accent pe respectarea dreptului de autor;
   - instituirea unor Comisii de etică etc.

© Veverita Tatiana, 2022

3. Studiile arată că metodele enunțate pot reduce fenomenul plagiatului lucrărilor științifice substanțial.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. LEGE Nr. 139 din 02.07.2010 privind dreptul de autor şi drepturile conexe. Publicat: 01.10.2010 în *Monitorul Oficial* Nr. 191-193 art Nr: 630. Disponibil online: http://lex.justice.md/index.php?action=view&view=doc&lang=1&id=336156.
2. Avoiding Plagiarism in Scientific Research. Deanship of Scientific Research, 2012. Disponibil online: https://prod.kau.edu.sa/Med/ali/files/Publications/Guide/Avoiding_Plagiarism_in_Scientific_Research_Booklet.pdf.
3. FOLTÝNEK, T. et all. *How to Prevent Plagiarism in Student Work.* A Handbook for Academic Staf. Prague, 2020.

© Veverita Tatiana, 2022

CZU: 372.851:004

UTILIZAREA RESURSELOR DIGITALE ÎN FORMAREA MATEMATICĂ A ELEVILOR DIN CLASELE CU PROFIL UMANIST

Liubov ZASTÎNCEANU
Universitatea de Stat „ Alecu Russo" din Bălți
e-mail: zastinceanu.liubovi@usarb.md

Rezumat. Provocarea curriculumului disciplinar la matematică pentru liceu, ediția 2019, și pandemia COVID-2019 au implicat apariția unor probleme didactice inedite pentru profesorii de matematică. Instrumentele didactice digitale, open-source, precum și instrumentele personale ale profesorilor, au permis soluționarea plauzibilă a multor dintre aceste situații. În articol vor fi descrise diferite resurse digitale, în mare parte originale, care au permis autorului realizarea unei instruiri calitative la matematică în clasele cu profil umanist.
Cuvinte-cheie: resurse digitale, matematica de liceu, profil umanist.

Abstract. The challenge of the lyceum mathematics disciplinary curriculum, 2019 edition, and the COVID-2019 pandemic involved the emergence of new didactic problems for mathematics teachers. Digital didactic tools, open-source as well as teachers' personal tools, have allowed the plausible solution of many of these situations. The article will describe various digital resources, mostly original, which allowed the author to achieve a qualitative training to mathematics in classes with a humanistic profile.
Keywords: digital resources, lyceum mathematics, humanistic profile.

Anul de studii 2019-2020 a venit în sistemul de învățământ din Republica Moldova cu două provocări majore pentru profesori: implementarea unui nou curriculum și pandemia COVID-2019. Acestea au continuat să fie actuale și în următorii doi ani de studii și, acum, în vara 2022, cu primii absolvenți de liceu care au studiat după curriculum 2019, putem face o analiză a celor realizate în acești 3 ani de studii și contabiliza rezultatele obținute.

Pentru profesorii de matematică de liceu provocarea curriculară s-a manifestat în special la profilul umanist, unde a fost revizuit și reconstruit conceptual curriculumul disciplinar. Printre cele mai mari schimbări putem enumera [1]:

- reformularea competențelor specifice pentru profilul umanist;
- excluderea unui număr impunător de conținuturi algebrice în clasa a X-a: ecuații, inecuații, sisteme și totalități de ecuații și inecuații iraționale, exponențiale și logaritmice, întreg conținutul trigonometric;
- excluderea totală a domeniului Analiza Matematică;
- includerea în fiecare compartiment studiat a unui conținut obligatoriu, ce ține de aplicațiile acestui conținut în cotidian.

E salutabilă încercarea de a pune în evidență diferența dintre educația matematică a elevilor de la profil real și a celor de la profil umanist, dar, ca și orice reformă curriculară,

© Zastinceanu Liubov, 2022

ea a ridicat numeroase întrebări privind implementarea modificărilor apărute. Cea mai dificilă pentru majoritatea profesorilor a fost: cum să demonstrăm elevilor aplicațiile matematicii, atunci când conținutul matematic studiat nu permite prezentarea majorității modelelor proceselor reale?

Activitatea în calitate de profesor de matematică la Colegiul Pedagogic „Ion Creangă” din cadrul Universității de Stat „Alecu Russo” din Bălți (USARB) în ultimii trei ani de studii a permis trăirea tuturor dificultăților profesionale de ultimă oră. Curriculumul disciplinar la matematică la colegiu este corelat cu curriculumul respectiv de la profilul umanist pentru liceu. Realizarea orelor de matematică cu două grupe de colegiu din anul I până în anul III inclusiv, ceea ce corespunde claselor de profil umanist a X-a - a XII-a, a implicat necesitatea rezolvării aceloraşi probleme didactice, cu care s-au ciocnit profesorii de matematică cu clase de profil umanist din liceu.

Curriculumul pentru clasa a X-a la profilul umanist, pentru primul semestru, presupune o recapitulare și o completare a curriculumului gimnazial, de aceea, ca și conținut nu au fost întâmpinate mari dificultăți de implementare nici în toamna anului 2019. O situație, care ridica întrebări didactice în acest caz a fost realizarea orelor de sinteză și sinteză integrativă, un moment încă puțin explorat de către profesori [1]. Aici vin să ne susțină, indiscutabil, resursele digitale, în care prin intermediul unui motor de căutare poate fi găsită rapid și mult mai simplu decât într-o bibliotecă clasică informația necesară. Într-o oră de sinteză integrativă pot fi utilizate momente din istoria matematicii cu tematica lecției, probleme istorice sau distractive, modele elaborate pentru diferite situații etc.

Figura 1. Cadru din prezentarea *Aplicațiile corpurilor rotunde*, clasa a XII-a, profil umanist

Lecțiile de sinteză și sinteză integrativă sunt lecții de formare a capacităților de analiză și sinteză a achizițiilor matematice [1]. Volumul de informație cu care se lucrează

© Zastinceanu Liubov, 2022

la aceste ore și modalitatea de lucru cu ea impune utilizarea unor prezentări electronice, care ar susține evenimentele lecției. Realizarea sintezelor integrative la finalul studierii capitolelor a permis demonstrarea capacităților creative ale profesorilor la maximum, în special pentru profilul umanist, or aici se presupune demonstrarea aplicațiilor conținuturilor învățate, iar aplicații accesibile umaniștilor sunt foarte puține (figura 1).

În anul de studii 2019 -2020 au fost realizate două lecții publice de sinteză integrativă pentru clasa a X-a. La a doua din ele au fost prezenți și profesorii de matematică, aflați la moment la cursurile de formare continuă (Centrul de Formare Continuă USARB). Utilizarea prezentării electronice și aplicațiilor în Geogebra au permis planificarea și proiectarea unei lecții bine structurate și eficiente la subiectul *Funcții. Oră de sinteză integrativă* (disponibil pe https://www.didactic.ro/materiale-didactice/functiifunctia-puterefunctia-radical-sinteza-integrativa, 280 descărcări).

În primăvara 2020 la problemele didactice, ridicate de implementarea curriculumului 2019, s-au adăugat și cele ridicate de pandemia COVID – 2019. Lipsa resurselor tehnice la instituțiile de învățământ și la elevi acasă, problemele cu accesul la Internet, competențele limitate ale profesorilor în utilizarea diferitor instrumente digitale pentru organizarea instruirii la distanță au implicat carențe serioase în formarea matematică a elevilor în perioada martie-mai 2020.

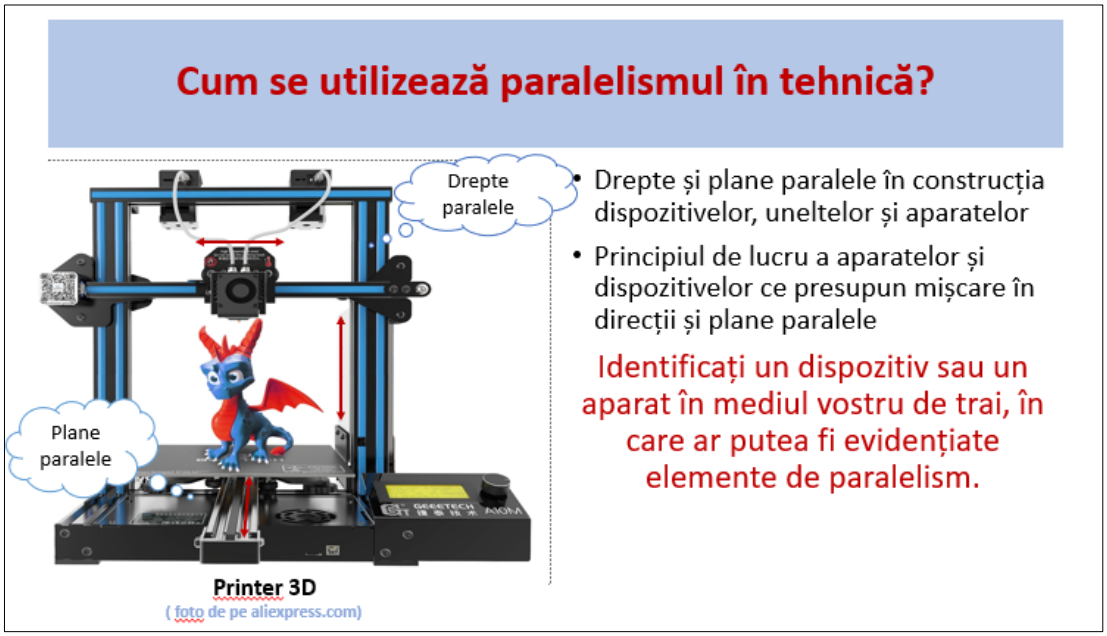


Figura 2. Cadru din lecția *Aplicațiile paralelismului*, disponibil pe http://educatieonline.md/Video?class=11&discipline=6

Ministerul de resort s-a alertat în acest sens și cu rapiditate au fost inițiate crearea lecțiilor on-line, corelate cu curriculumul 2019, pentru toate disciplinele școlare, în cadrul proiectului Educație Online (http://educatieonline.md). Pe platforma respectivă, în

© Zastinceanu Liubov, 2022

primăvara 2020, au început a fi plasate lecții video on-line, pentru a susține profesorii în activitatea lor. Profesorul avea posibilitatea să trimită link-ul pentru studiul independent al subiectului, pentru varianta Flipped Classroom sau unui elev, care în timpul orei la distanță nu a avut acces la Internet. Am participat la etapa a doua a proiectului, inițiată în vara 2020, anume cu scopul de a-mi asigura resursele digitale necesare pentru studierea conținuturilor geometrice în clasa a XI-a, profil umanist, la capitolul Paralelism în spațiu (figura 2).

Actualmente, proiectul s-a extins și s-a dezvoltat și propune nu numai lecții filmate, ci și alte resurse digitale, utile și comode pentru utilizare atât la clasă, cât și în regim de studiu independent sau de recuperare a lacunelor. Există doar un moment mai specific pentru liceu: materialele plasate nu sunt împărțite pe profiluri și profesorul, care dorește să le utilizeze la profil umanist, trebuie să le selecteze foarte atent.

În perioada 2020-2022 profesorii școlari au excelat în cumularea competențelor digitale, au studiat independent și au făcut cursuri de formare pentru a elabora și utiliza resurse didactice digitale personale de toate tipurile: prezentări, teste, modele simulate în aplicații dedicate, exerciții interactive. Din păcate, nu toate competențele obținute de profesori pot fi aplicate real în practică. În topul motivelor lipsei de utilizare a anumitor soft-uri în procesul educațional la matematică persistă deficitul de tehnică, dificultatea introducerii formulelor și realizării desenelor, lipsa unui acces stabil la Internet și a tehnicii necesare la elevi etc. Astfel, rezultatele unui sondaj pentru profesorii de matematică, realizat la finele anului 2021, demonstrează, că în topul soft-urilor utilizate real în procesul educațional la matematică sunt Googlemeet (98,6% din respondenți), Classroom (76%), Googleforms (79%), Zoom (80%) [2]. Evident, majoritatea dintre ele sunt pentru susținerea procesului educațional la distanță prin oferirea unui mediu propice, iar resursele didactice digitale, pe care le utilizează profesorul în acest proces sunt realizate în alte programe, cum ar fi Geogebra, Canva, Quizizz, Kahoot etc.

Revenirea în sălile de clasă în 2021 - 2022 a demonstrat, că procesul educațional a suportat schimbări majore anume în aspectul ponderii utilizării resurselor didactice digitale în procesul educațional. S-a îmbunătățit dotarea tehnică a multor instituții de învățământ, profesorii au materiale didactice proprii deja elaborate, actorii procesului educațional posedă competențe digitale bine dezvoltate, elevii așteaptă și susțin utilizarea resurselor didactice digitale la ore, găsesc informația indicată în afara orelor, elaborează proiecte sub formă de prezentări electronice, video, programe etc. Evident, toate acestea pot și trebuie valorificate la orele cu prezență fizică, inclusiv la orele de matematică.

Reactualizarea cunoștințelor necesare pentru studierea unui subiect nou poate fi realizată prin intermediul unui test rapid pe GoogleForms, cu feed-back imediat realizat de program; cu un exercițiu interactiv pe Kahoot sau un exercițiu pe tabla interactivă, dacă ea este prezentă în clasă. Profesorul câștigă în viteza și verificarea evaluării, obiectivitatea acesteia și realizarea unei acoperiri majore a clasei în timpul lecției. Un sistem de teste de

© Zastinceanu Liubov, 2022

reactualizare a cunoștințelor pentru câteva lecții succesive, pentru 3-4 minute la început de oră, pot nu numai prezenta pentru profesor tabloul real al însușirii conținuturilor, ci și servi ca resurse de exersare pentru elevi în pregătirea lor pentru lecția următoare, evaluarea sumativă, identificarea și recuperarea lacunelor în pregătire. Astfel, pentru unitatea de învățare *Elemente de teoria probabilităților, clasa a XII-a*, pentru profil umanist, pentru 3 lecții succesive au fost elaborate teste pe GoogleForms pentru etapa de reactualizare a cunoștințelor necesare. Al doilea test conținea 25% de itemi din primul test, al treilea – 25% itemi din primul test și 25 % de itemi din al doilea test (la conținuturile noi), puțin reformulați. Fiecare test următor avea cu 2 itemi mai mult ca precedentul, pentru a mări și viteza demonstrării cunoștințelor. Aplicarea acestor teste la începutul orei permitea obținerea unui tablou real al cunoștințelor acumulate pentru fiecare dintre cei 60 de elevi (în două clase), iar transmiterea pe mail-ul personal al elevilor a testelor verificate asigura feed-back-ul imediat și posibilitatea autoevaluării obiective. Astfel de sisteme de teste, în special teste de cunoștințe, pot fi elaborate și pentru alte unități de învățare la profilul umanist, cum ar fi *Funcții (clasa a X-a), Elemente de algebră superioară (clasa a XI-a), Elemente de combinatorică (clasa a XII-a).* Dacă aceste sisteme de teste vor fi susținute și de niște prezentări calitative la oră, lecții video recomandate sau tutoriale atent alese pentru studiu independent, evident asociate cu ore bine planificate și realizate, putem asigura o studiere calitativă a conținuturilor matematice și formarea competențelor specifice pentru profilul umanist.

Resursele didactice digitale pot fi utilizate nu numai de profesor la clasă, ci și de însuși elevi pe parcursul pregătirii lor pentru ore, realizarea proiectelor individuale sau de grup ca și formă de evaluare sumativă și recuperarea lacunelor. O utilizare tradițională este utilizarea unor resurse recomandate de profesor dintre cele existente și accesibile în rețeaua Internet:

- lecții filmate și activități interactive pe platforma http://educatieonline.md/;
- tutoriale (secvențe video) și alte materiale de autori din România sau alte țări, alese în corespundere cu curriculumul din Republica Moldova și cu specificul însușirii matematicii în clasa respectivă [3];
- materiale plasate în contextul site-urilor dedicate, blog-urilor, cursurilor electronice de matematică plasate de profesori din țară și de către instituțiile de învățământ superior.

Mai puțin tradițională ar putea fi utilizarea în procesul educațional a unor site-uri, care aparent nu prea au legătură cu matematica de liceu, cum ar fi, de exemplu https://statistica.md/. În cadrul studierii unității de învățare *Elemente de statistică matematică* elevilor le-a fost propusă, cu titlu de metodă de evaluare alternativă, realizarea unui proiect de grup, utilizând acest site. Sarcina de proiect a fost următoarea: Utilizând datele de pe site-ul https://statistica.md/, fiecare grup pregătește informație despre un

© Zastinceanu Liubov, 2022

anume domeniu al economiei naționale (Statistica salarizării, Ocupația forței de muncă, Utilizarea timpului etc.) sub forma unei prezentări electronice ce va conține prezentarea domeniului, tipurile de informații prezente pe site din acest domeniu, sinteza pentru câțiva ani a unor date sub formă de tabele și diagrame și analiza acestora, prezentarea a 3 probleme practice referitoare la domeniu cu utilizarea datelor veridice de pe site. Experiența realizării acestui proiect a demonstrat cointeresarea elevilor în analiza unor date veridice din economia Republicii Moldova, a dezvoltat capacitatea de a lucra cu site-urile și informația și a prezentat, indiscutabil, latura aplicativă a matematicii pentru elevi.

În contextul celor expuse anterior, tragem următoarele concluzii generale:

- există suficiente resurse digitale didactice gata, care ar permite realizarea unor lecții calitative la matematică pentru profil umanist;
- utilizarea corectă și bine gândită a diferitor resurse didactice digitale pentru formarea matematică a elevilor de liceu în clasele cu profil umanist este destul de eficientă;
- profesorul poate și trebuie să utilizeze diferite resurse didactice digitale, proprii sau a altor autori, pentru a asigura procesului educațional la matematică pentru profilul umanist actualitate tehnologică și pedagogică, individualizare, individualitate și dimensiune practică.

Bibliografie

1. *Curriculum național Matematică, clasele X-XII (Curriculum disciplinar. Ghid de implementare).* Chișinău, 2020, disponibil pe https://mecc.gov.md/sites/default/files/matematica_liceu_ro.pdf, vizitat 20.07.2022
2. ZASTÎNCEANU, L. Evaluarea la matematică prin intermediul utilizării soft-urilor. Reflecții metodice. În: *Acta et Commentationes (Științe ale Educației),* nr.4(26), 2021, pp. 86-94. ISSN 1857-0623.
3. Test la poliedre, sarcini de pregătire, disponibil pe https://www.youtube.com/watch?v=VdLLtpNqQGI, vizitat 21.07.2022.

© Zastinceanu Liubov, 2022

CZU: 37.016:51

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ СОКРАЩЕНИЯ ФАКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Юлия БАЛАШОВА
Тираспольский государственный университет
e-mail: balashova_ju@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена способам сокращения размерности факторного пространства. Методы корреляционных плеяд и корреляционных ядер помогают отсеять факторы по двум критериям: незначимые факторы и слабо коррелированные. Отсев незначимых факторов помогает строить адекватную математическую модель.
Ключевые слова: размерность факторного пространства, корреляционная матрица, метод корреляционных плеяд, метод корреляционных ядер.

Abstract. The work is devoted to ways to reduce the dimension of the factor space. The methods of correlation pleiades and correlation kernels help to filter out factors according to two criteria: insignificant factors and weakly correlated ones. Elimination of insignificant factors helps to build an adequate mathematical model.
Keywords: factor space dimension, adequate mathematical model, information capacity, correlation matrix, method of correlation pleiades, method of correlation kernels.

Перед проведением работ по получению математической модели во всех случаях желательно сократить первоначальный список до возможного минимума, так как с ростом числа факторов трудоемкость моделирования растет, как степенная функция. Одним из способов понижения размерности факторного пространства является определение пар сильно коррелированных факторов с последующим отсеиванием одного из них как не несущего дополнительной информации об исследуемом объекте. Задача отсева значительно усложняется, когда имеется несколько сильно коррелированных факторов, сцепленных между собой в различных комбинациях, и при этом в таблице исходных данных имеется несколько таких комбинаций. Основой анализа с последующим отсевом факторов, не несущих дополнительной информации об объекте, является корреляционная матрица.

Корреляционная матрица представляет собой квадратную симметричную матрицу размером *MxM*, главная диагональ которой заполнена единицами, недиагональные элементы представляют собой меру тесноты связи между парой факторов (коэффициент корреляции, корреляционное отношение, индекс Фехнера и т. д.). Другими словами, для заполнения корреляционной матрицы необходимо найти меру тесноты связи для каждой пары факторов, то есть, провести

© Balashova Iulia, 2022

корреляционный анализ таблицы исходных данных по принципу "каждый с каждым" любым известным способом [1].

Если обозначить один из сравниваемых факторов через *X*, а другой – через *Y*, то величины *Xi, Yi* соответствуют паре чисел, взятых на пересечении *i*-ой строки таблицы исходных данных столбцов *X* и *Y* соответственно. В этом случае коэффициент корреляции *r* можно подсчитать либо по классической формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{NS_xS_y} \quad (1)$$

либо по более удобной

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_iY_i - \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N} X_i)*(\sum_{i=1}^{N} X_i)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2\right]}} \quad (2)$$

где *N*- количество пар элементов *X* и *Y*.

Коэффициент корреляции отражает степень тесноты только линейной связи между *X* и *Y*, поэтому по полученным оценкам можно строить только линейные уравнения регрессии между *X* и *Y*, что в случаях сильной связи представляет собой большой интерес. Для линейной связи вероятное значение величины [2]:

$$\tilde{Y} = \bar{Y} - r\varepsilon S_y \quad (3)$$

с коридором ошибок (коридором существования): $\Delta Y = \pm Z_{\text{дов}} S_y \sqrt{1-r^2}$ (4), где $\varepsilon = \frac{X-\bar{X}}{S_x}$ (5), $Z_{\text{дов}}$– квантиль доверительной вероятности $P_{\text{дов}}$.

Метод корреляционных плеяд позволяет сократить размерность факторного пространства математической модели. Корреляционная матрица представляет собой квадратную симметричную матрицу. Непосредственный анализ такой таблицы представляет значительную трудность, поэтому для ее анализа удобнее воспользоваться методом корреляционных плеяд. Метод заключается в том, что в корреляционной матрице находится недиагональный элемент с максимальной по модулю величиной коэффициента корреляции r_{ij}. Из матрицы вычеркиваются столбцы i и j, а из строк с номерами i и j выбирается следующий максимальный по модулю элемент, например, r_{il}. Столбец l вычеркивается, а из строк i, j, l выбирается следующий максимальный по модулю элемент и т.д. до исчерпания данных [3].

Результат такой работы удобно представить в виде графа, вершинами которого являются факторы, ребрами — максимальные связи, причем длины ребер обратно пропорциональны величине соответствующих коэффициентов корреляции.

Выбрав некоторое пороговое значение коэффициента корреляции, например, $|r_{пор}| = 0.5$, можно отделить по этому признаку плеяды друг от друга (пунктирными линиями). Внутри плеяды связь признается очень тесной, а между

© Balashova Iulia, 2022

плеядами - слабой. Если от каждой плеяды выбрать по одному представителю, то сокращенное до количества плеяд количество факторов будет нести об исследуемом технологическом процессе, проблеме, ту же информацию, что и раньше. При этом факторы нового списка будут слабо коррелированны между собой, что и является одним из главных условий при переходе к математическому моделированию. По итогам расчетов выделяют факторы, наименее коррелированные с другими.

Метод корреляционных ядер помогает наглядно выявить факторы, к которым как к центру тяготеют другие факторы. Суть метода заключается в том, что анализируется не вся корреляционная матрица, а только ее верхняя треугольная часть. После нахождения максимального по абсолютной величине коэффициента корреляции (r_{ij})=max в матрице гасится только этот элемент, затем ищется следующий по абсолютной величине $|r_{lk}|$ и т.д., из которых строится граф. При появлении очередного $|r_{if}|$ соответствующая связь появляется только в том случае, если она не замыкает ветви графа- дерева в цикле, в противном случае эта связь не учитывается [4].

После выделения по одному представителю от каждой плеяды можно из таблицы исходных данных построить таблицу некоррелированных (слабо коррелированных) данных, информационная емкость которой практически не изменится, а размер факторного пространства сокращается в десятки раз. Однако в силу того, что плеяды и ядра учитывают не все связи, а только максимальные, следует полученную таблицу некоррелированных данных заново проверить на наличие парных корреляционных зависимостей, вновь составить корреляционные матрицы и проанализировать с помощью новых плеяд и ядер. В случае обнаружения достаточно сильной корреляционной зависимости ее следует уничтожить путем замены одного из факторов на другого представителя из соответствующей плеяды.

Библиография

1. АДЛЕР, Ю. П.; МАРКОВА, Е. В.; ГРАНОВИЦКИЙ Ю. В. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.* Москва: Наука. 1976. 279 с.
2. АЙВАЗЯН, С. А.; МХИТАРЯН, В. С. *Прикладная статистика и основы эконометрики*. Москва: ИПУ РАН, 1995. 656 с.
3. БЕРЕЖНАЯ, Е. В.; БЕРЕЖНОЙ, В. И. *Математические методы регулирования экономических систем*. Москва: Финансы и статистика, 2006. 432 с.
4. БЕТЕЛЕВ, С. Л.; ГУРВИЧ, Ф. Г. *Математико – статистические методы экспертных оценок.* Москва: Статистика, 1980. 264 с.

© Balashova Iulia, 2022

CZU: 159.9.07

О ПРОБЛЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ КОММУНИКАТИВНОЙ КОМПЕТЕНЦИИ МЕДИЦИНСКОГО РАБОТНИКА

Ксения БАНУЛ
Тираспольский государственный университет, г. Кишинев
e-mail: banulksenia@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается проблема формирования коммуникативной компетенции медицинского работника. Описывается алгоритм приема пациента. Автор считает, что придерживание алгоритма приема пациента способствует построению эффективной коммуникации с ним, а также помогает грамотно распределить время приема. Раскрываются проблемы использования коммуникативных техник, повышающих коммуникативную эффективность при взаимодействии с пациентом. В рамках медицинской деятельности коммуникативная компетенция рассматривается как одна из ведущих профессиональных компетенций медицинского работника, оказывающих решающее влияние на социально-перцептивную и коммуникативную сферы в системе «медицинский работник - пациент».
Ключевые слова: алгоритм; коммуникативная компетенция; медицинский работник; пациент; принцип; эффективная коммуникация.

Abstract. The article deals with the problem of formation of the communicative competence of a medical worker. The patient admission algorithm is described. The author believes that adhering to the algorithm for receiving a patient contributes to building effective communication with him, and also helps to correctly allocate the time of admission. The problems of using communicative techniques that increase communicative efficiency when interacting with a patient are revealed. Within the framework of medical activity, communicative competence is considered as one of the leading professional competencies of a medical worker, which has a decisive influence on the social-perceptual and communicative spheres in the «health worker-patient» system.
Keywords: algorithm; communicative competence; medical worker; a patient; principle; effective communication.

Введение

Навыки общения крайне важны в любой профессии, связанной с работой людьми. В профессиональной деятельности медицинского работника коммуникация с пациентом - неотъемлемая и значительная часть работы медицинского работника. Коммуникативные навыки - это ряд приёмов и умений, применение которых в определенных ситуациях и правильной последовательности обеспечат наилучший результат в выстраивании взаимоотношений между врачом и пациентом. Владение этими навыками так же важно, как и клиническое мышление, владение профессиональными врачебными манипуляциями и знаниями. В структуре профессиональной компетентности будущих медицинских работников в качестве компонентов рассматриваются ценностные установки и мотивы, знания о предмете и способы их практической деятельности, обеспечивающих внутренние

© Banul Xenia, 2022

условия для успешного выполнения профессиональной деятельности; совокупность личностных качеств. Формирование коммуникативной компетентности медицинского работника представляет важную научную и практическую проблему, решение которой ведет к повышению качества медицинских услуг населению. Сформированная коммуникативная компетенция делает специалиста медицинской сферы более успешным и востребованным, способствует гибкости профессионального мышления, позволяет адаптироваться к новым профессиональным ситуациям, соответствовать требованиям, предъявляемым профессией [14]. Эффективные коммуникации особенно важны в условиях крайне ограниченного времени для оказания медицинских услуг. В условиях очень напряжённого приёма пациентов в амбулаторных учреждениях (поликлинике) внедрение эффективных коммуникаций необходимо рассматривать как очень серьёзный фактор и как стратегию, призванную облегчить эти трудности. Именно поэтому так важна целенаправленная работа по формированию коммуникативной компетентности медицинских работников.

Основная часть

Профессия медицинского работника представляет собой один из наиболее сложных и ответственных видов профессиональной деятельности, относящаяся к типу: «Человек-Человек», связанная с общением и взаимодействием с пациентами, их родственниками, коллегами и другими участниками лечебно-профилактического процесса. Современные социальные условия и социальные потребности выявляют необходимость развития коммуникативной компетентности у медицинских работников.

Большой вклад в изучении представлений о коммуникации внес T. Callo [2]. Изучением роли коммуникации в установлении межличностных и межкультурных взаимоотношений занимались: I. Pânişoară, O. S. Cristea, V. Botnari, M. Ianioglo, N. Silistraru, V. Goraş-Postică, Л.Н. Васильева, Л.П. Урванцев и др. [1;4;5,7;10;12]. Положения компетентностного подхода были рассмотрены в работах: N. Chomsky, X. Roegiers, Vl. Guţu, C. Cucoş, Vl. Pâslaru, D. Potolea, S. Toma, И.А. Зимняя, А.В. Хуторской и др. [3;6;8;9;13]. Изучению профессионально важных качеств медицинского работника уделялось большое вниммание в работах: Г. В. Безродной, И. И. Бенедиктова, А. П. Васильковой, Л. А. Лещинской, Е. Б. Одерышевой, Л. А. Цветковой и др.

В медицине эффективной коммуникацией является:

– Нейтральная. С её помощью пациенты получают информацию по вопросам здоровья и разъяснение поведенческих навыков, способствующих сохранению здоровья.

© Banul Xenia, 2022

– Компетентная. Предоставление пациенту достоверной, правдивой информации по вопросам здоровья.
– Достоверная. Вся информация базируется на результатах научных исследований или на опыте, которому можно доверять.
– Равноправная. Каналы коммуникации, содержание и язык нужно выбирать таким образом, чтобы суть сообщения дошла до всех представителей целевой группы.

Для построения эффективной коммуникации с пациентом в условиях крайне ограниченного времени необходимо придерживаться определенного алгоритма проведения приема пациента. Алгоритм приема пациента состоит из следующих фаз:

Контактная фаза - это первый этап профессиональной коммуникации медицинского работника с пациентом. В течение контактной фазы медицинский работник знакомится с пациентом, между ними устанавливается психологический контакт, складывается первое впечатление друг о друге, формируются предпосылки для последующего межличностного взаимодействия. Первое впечатление пациента о медицинском работнике во многом определяет то, как пациент будет выполнять его назначения, принимать лекарства, соблюдать диету и режим, какими будут представляться перспективы выздоровления. У пациента должно возникнуть представление о том, что медицинский работник хочет и может ему помочь. Первое основывается на эмпатических способностях медицинского работника, а второе - на его уверенной манере поведения. Невербальная коммуникация на этом этапе важнее, чем вербальная. Контактная фаза очень короткая, она длится несколько секунд и заканчивается с началом вербального контакта между медицинским работником и пациентом. Обычно контактная фаза завершается, когда медицинский работник задает свой первый вопрос: «На что Вы жалуетесь?». С этого вопроса начинается вторая фаза общения между врачом и больным - фаза ориентации. Контактная фаза включает:

1. Приветствие пациента.
2. Забота о комфорте пациента. Медицинский работник сообщает, где можно расположиться, куда положить вещи. Устанавливается «доверительная дистанция».
3. Самопрезентацию. Медицинский работник представляет себя – ФИО, обозначает характер консультации.
4. Согласие на расспрос. Медицинский работник спрашивает, нет ли возражений у пациента на проведение опроса.
5. Идентификация личности пациента. Просит назвать ФИО пациента, год рождения (возраст).

© Banul Xenia, 2022

Фаза ориентации – это фаза, на которой проводится расспрос пациента. Расспрос начинается с открытых вопросов «Что привело Вас?», а затем задаются уточняющие вопросы (анамнез жизни, социальный анамнез, семейный анамнез, фармакологический анамнез, аллергологический анамнез). При этом очень важно использовать техники активного слушания, проводить обобщение, скрининг, резюмирование, отражение и др. Слушая пациента, следует некоторое время не перебивать его, не задавать вопросов и не делать замечаний, которые могут помешать пациенту излагать свои жалобы. Не следует подсказывать дополнительные детали, которые могли привести к возникновению заболевания. Внушающие неосознаваемые установки и ожидания врача, способны изменить всю картину в целом. Таким образом, медицинский работник получает первое представление о пациенте.

При расспросе пациента применяются следующие техники:

1. Как правило, вначале беседы медицинский работник задает открытый вопрос «Что привело Вас?», «Что бы Вы хотели обсудить сегодня?» или «С чем Вы пришли?».
2. Медицинский работник начинает расспрос с фразы «На что Вы жалуетесь?». При этом необходимо использовать вопросы открытого типа «На что Вы жалуетесь?» или «Что Вас беспокоит?».
3. Медицинский работник выслушивает пациента без перебивания. Существует понятие так называемой «Золотой минуты» - свободный рассказ пациента, который чаще всего в реальной жизни (по данным многочисленных исследований) укладывается в одну минуту.
4. Обобщает сказанное пациентом. Медицинский работник повторяет сказанное пациентом для подтверждения правильности своего понимания того, что говорит пациент; приглашая пациента поправлять или добавлять.
5. Скрининг. Медицинский работник предпринимает попытку для выявления других (второстепенных, скрытых) проблем через вопрос «Что-то еще вас беспокоит?», «Это все, что вас беспокоит?», при этом использует «обращение по имени (имени отчеству), что-то ещё беспокоит?» и проводит скрининг до начала выявления подробностей.
6. Учёт мнения пациента. Медицинский работник спрашивает, с чем пациент связывает свое состояние или что, по его мнению, привело к данной проблеме. При этом, медицинский работник не предлагает вариантов ответа.
7. Использование открытых вопросов при сборе информации о чем-то конкретном, например «Расскажите об этом подробнее», «Расскажите об этой проблеме».

© Banul Xenia, 2022

8. Предложение своих вариантов ответов, на заданные вопросы. Задавая вопрос, медицинский работник предлагает варианты для выбора ответа.

При выстраивании отношений в процессе коммуникации необходимо соблюдать следующее:

1. Зрительный контакт не менее половины времени в течение всего расспроса.
2. . Обращения к пациенту имени отчеству.
3. Проявление эмпатии.
4. Выдерживание пауз, когда пациент ненадолго замолкает – дает возможность ему продолжить.
5. Помощь пациенту подбадриванием, повторением, перефразированием, но без уточняющих вопросов
6. Результат коммуникации выявляет исчерпывающий список проблем пациента, позволяющий сформулировать верную диагностическую гипотезу и обеспечивая удовлетворенность пациента беседой.

Фаза аргументации - получение дополнительной информации, которое может быть вербальным (расспрос пациента, разнообразные уточняющие вопросы, которые появляются по ходу беседы, по мере изложения пациентом своих жалоб) и невербальным (осмотр пациента). Фаза аргументации - наиболее активная фаза общения. Длительность ее может быть различной, в зависимости от состояния пациента, от его индивидуально-психологических характеристик, нозологической принадлежности болезни.

Фаза корректировки - объяснение пациенту плана лечения, осуществляется назначение, рекомендации по режиму и диете. Медицинский работник отвечает на возможные вопросы пациента, касающиеся его болезни, тактики лечения, возможного прогноза заболевания. Медицинский работник должен записать свои назначения и рекомендации, чтобы быть уверенным в их точном выполнении. Задачей медицинского работника является достижение комплайенса во взглядах на заболевание и факторы риска, а также на коррекцию поведения направленную на сохранение и укрепление здоровья. Медицинский работник должен убедиться в том, что пациент правильно его понял, сформировал объективное представление о своем состоянии, готов и будет выполнять все данные ему рекомендации. Медицинскому работнику необходимо получить обратную связь от пациента, то есть добиться того, чтобы пациент проговорил о готовности к изменению своего поведения по отношению к своему здоровью. Медицинский работник должен убедиться в том, что пациент, сформировал объективное представление о своей болезни и готов выполнять все назначения. Медицинский работник кратко подводит итоги беседы, обобщая все сказанное ранее, при необходимости повторяя и акцентируя внимание пациента на самых важных моментах беседы.

© Banul Xenia, 2022

Встреча с пациентом должна иметь завершение не только в профессиональном плане, но и в психологическом. Важно, какими словами медицинский работник заканчивает беседу. Известный в психологии «эффект края» говорит о том, что лучше всего запоминаются начало и конец встречи. В памяти больного должны сохраниться самые первые и последние слова врача, внушающие надежду. Последняя фаза общения «врач-больной», завершающая встречу, несет в себе лишь психологическую нагрузку. В фазе корректировки, как и в контактной фазе, невербальное поведение врача - его поза, жесты, взгляд, мимические реакции, интонации голоса - имеют большое значение. Важно содержание заключительной фразы, например, «Сделаем все возможное, чтобы Вам помочь» [11]. У каждого врача со временем вырабатывается своя собственная заключительная фраза, привычно завершающая встречи с больным. Она является частью профессионального «имиджа», произносится спокойным и уверенным голосом, сопровождается доброжелательным взглядом, жестом, провожающим и одновременно приглашающим пациента на следующую встречу.

Заключение

Эффективная коммуникация — залог правильного диагноза, так как грамотно построенное общение с пациентом позволит выяснить все детали болезни, составить необходимый план обследования и схему лечения. С целью осуществления эффективной коммуникации нами была разработана памятка для медицинского работника:

1. Белый халат - принятая униформа медицинских работников, должен быть чистым, выглаженным, застегнутым на все пуговицы, соответствующей длины и фасона.
2. Медицинская шапочка является обязательной для отделений хирургического профиля и мест, связанных с контактом с особо опасными инфекциями. Волосы аккуратно убирают под шапочку.
3. Задержитесь на минуту перед тем, как войти к пациенту. Необходимо настроиться на внимание, доброжелательность и спокойствие по отношению к пациенту.
4. Войдя к пациенту, не начинайте общение с расспроса или со сбора анамнеза. Дайте пациенту привыкнуть к вам и сами настройтесь на работу. Представьтесь, вымойте руки, выберете удобное для себя место в общении с пациентом. Никогда не садитесь к пациенту на кровать и не заставляйте его подстраиваться под вас. Оптимально расположиться на стуле справа от пациента, в непосредственной близости от кровати, лицом к ее головному концу. Постарайтесь одним взглядом видеть всего пациента, для того, чтобы

© Banul Xenia, 2022

можно было оценить и местные симптомы проявления заболевания, реакцию лица пациента на проводимое обследование.

5. Настроение и поведение пациента в значительной степени определяются его самочувствием. Он может быть раздражительным, легко возбудимым, вспыльчивым, обидчивым, конфликтным, подавленным. При общении с такими пациентами важно проявлять максимум терпения, успокаивая их своей уверенностью, давая понять в ходе разговора, что будет сделано все возможное и необходимое для улучшения их состояния. Надо дать понять пациенту, что в свою очередь многое зависит от него самого, тщательного выполнения им всех предписанных правил лечения, терпения и веры врачу и в полное выздоровление.

Таким образом, необходимой составляющей профессиональной компетентности медицинских работников является эмоциональная, коммуникативная, эмпатическая, ценностная сфера, творческая и личностная составляющая. Сформированная коммуникативная компетенция является важной составляющей психологической готовности к профессиональной деятельности медицинского работника, является положительной мотивацией к профессиональной деятельности, способствует адекватной самооценки личностных возможностей, способности к проявлению эмпатии, ответственности за результат и др. В рамках медицинской деятельности коммуникативная компетенция рассматривается как одна из ведущих профессиональных компетенций медицинского работника, оказывающих решающее влияние на социально-перцептивную и коммуникативную сферы в системе «медицинский работник - пациент».

Библиография

1. BOTNARI, V. Competenţa studenţilor de a învăţa-un megarezultat educaţional. În: *Formarea competenței de învățare la elevi. Conf. șt. practică*. Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, Liceul Teoretic, ORIZONT, 2013. p. 4-8.
2. CALLO, T. *Educaţia comunicării verbale*. Chişinău: Litera. București: Litera Internațional, 2003. 148 p.
3. CHOMSKY, N. *Aspects of the Theory of Syntax*. Cambridge: The M.I.T. Press, 1965. 251 p.
4. CRISTEA, S. *Fundamentele pedagogiei*. Iaşi: Polirom, 2010.
5. GORAŞ-POSTICĂ, V. Formarea continuă a cadrelor didactice din domeniul educaţiei timpurii: Curriculum de bază. În: *Revista «Pro Didactica».* Chişinău, 2010. 89 p.

© Banul Xenia, 2022

6. GUTU, Vl. et al. *Tehnologii educaţionale. Ghid metodologic*. coord.: N. Bucun. Chişinău: Editura Cartier, 1998.
7. IANIOGLO, M. Formarea competenţei de comunicare asertivă la studenţii din mediul academic multietnic. Teză de doctor în pedagogie. Chişinău, 2012. 324 p.
8. PÂSLARU, V. ș.a. *Competențe ale pedagogilor: Interpretări*. Chișinău: Continental Grup, 2014.
9. POTOLEA, D.; TOMA, S. Conceptualizarea «competenţei»: concept şi implicaţii pentru programele de formare a adulţilor. În: *A III-a Conferinţă Naţională de educaţie a adulţilor «10 ani de dezvoltare europeană a educației adulților»* (coord. S. Sava). Timişoara: Editura Eurostampa, 2010.
10. SILISTRARU, N. *Cercetarea pedagogică. Ghid metodologic*. Chișinău, 2012. 100 p.
11. SILVERMAN, J.; DRAPER, J.; KURZ, S. *Skills for Communicating with patients* («Навыки для общения с пациентами»). 3 ed. Oxford University Press, 2013.
12. ВАСИЛЬЕВА, Л.Н.; УРВАНЦЕВ, Л.П. Психологический анализ коммуникативной компетентности будущего врача. In: *Ярославский психологический вестник*. Выпуск 9, 2003. 99-105 с.
13. ЗИМНЯЯ, И.А. *Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании*. Москва: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004.
14. СИЛЬВЕРМАН, Дж.; КЕРЦ, С.; ДРЕЙПЕР, Дж. *Навыки общения с пациентами*. Москва: Гранат, 2018.

© Banul Xenia, 2022

CZU: 372.851:519.673+37.042

ИЗ ОПЫТА ПРИМЕНЕНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Татьяна КОЖУХАРОВА

МОУ «Бендерский теоретический лицей им. Л. С. Берга», г. Бендеры

e-mail: tatiana.kojuharova@bk.ru

Аннотация. В статье показаны приемы формирования у учащегося логического мышления, умения находить решение в проблемных ситуациях. Приведены примеры проблемных заданий, познавательных задач. Статья полезна, как учителям математики, так и учителям других предметов.

Ключевые слова: обучение, способности, познавательные задания, задачи с практическим содержанием.

Abstracts. This article shows techniques that help to form logical thinking, find solutions in various problem situations. The material contains examples of problematic tasks, cognitive tasks. The article will be useful for both math teachers and teachers of other subjects.

Keywords: learning, abilities, cognitive tasks, tasks with practical content.

Задачей современных школ является формирование гармонически развитой личности. Важнейшим показателем этого является наличие высокого уровня мыслительных способностей. Если обучение ведет к развитию творческих способностей, то его можно сочетать с развивающим обучением, формировать мыслительные способности и познавательные потребности учеников, то есть в процессе учебной деятельности учащийся должен научиться анализировать, сравнивать, синтезировать, обобщать фактический материал, этому способствует изучение математики [1, с. 35-38].

Важнейшим средством активизации самостоятельной, творческой деятельности учащихся, развитие их умственных способностей являются познавательные задачи. В учебной литературе задачи формулируются предельно кратко, четко и определенно. В таком математически корректном, лаконичном изложении, учащимися, особенно в последнее время, в силу сложившихся обстоятельств: пандемии, дистанционного обучения, не всегда удается улавливать практическую направленность задачи, ее теоретическую ценность. Отсутствуют моменты, которые бы возбуждали любознательность и интерес учащихся. Приученные к решению типовых задач, уже переведенных на математический язык, многие ученики, оказываются беспомощными проводить самостоятельно математический анализ жизненных ситуаций [2, с.15-18].

Так как в практической деятельности задача является обычно не математической по содержанию, а прежде всего технической, физической, химической, поэтому, условия некоторых задач полезно преобразовывать таким образом, чтобы у ребят появлялась возможность самим увидеть их каноническую форму. Рекомендую также включать и элементы, вызывающие у учащихся чувства удивления, сомнения и

© Cojuharova Tatiana, 2022

доставляющие эстетическое удовольствие. Учителю, в процессе длительной учебной деятельности, чтобы у его подопечных вызвать интерес к задаче и обратить внимание большего количества глаз, необходимо научить их изменять и видеть условие задания таким образом, чтобы чувство эстетического удовлетворения и интерес к ней продолжался и после ее решения. Как же добиться этого? Понимаю, универсального рецепта нет, но из опыта работы могу поделиться следующими приёмами:

I) ***Показать учащимся, как теоретическая задача возникает из практической***

Задачи с практическим содержанием, в большинстве случаев, у учащихся вызывают интерес. Поэтому учителю необходимо не только показывать практическое значение и применение теоретической задачи, но и научить ребят самостоятельно этому, чтобы возрастал их интерес [3, с.50-52].

Например:

1) *Дан равнобедренный треугольник ABC. На стороне BC взята точка D. Какой из отрезков AD и CD меньше?*
   1_1) *Два населенных пункта A и C находятся на равных расстояниях от города B. По дороге BC между B и C находится отдельный домик D. К какому из данных двух пунктов A или C домик D ближе?*
2) *При каких значениях x производная функции $f(x) = 3x^2 - \frac{x^3}{3} - 7x$ равно нулю?*
   2_1) *Тело движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 - \frac{t^3}{3} - 7t$. Определить время остановки тела.*

II) ***Применять к задаче проблемную постановку вопросов***

Если задача для учащихся не является достаточно проблемной, полезно заменить ее вопрос более интересным, перспективным, при этом изменить условие задачи соответственно [3, с. 56-58].

Например:

1) *Длина моста 200 метров. Водитель его проехал за 2 минуты. Превысила ли скорость движения машины 5 км/ч.*
   1_1) *Длина моста 200 метров. Допустимая скорость движения по нему 5 км/ч. Водитель проехал мост за 2 минуты. Не нарушил ли он правил уличного движения?*
2) *Сколько получится сухих цветов из 35 кг цветов ромашки, если при сушке теряется 85% первоначального веса?*
   2_1) *Учащиеся собрали 35 кг цветов ромашки. Достаточно ли этого количества, чтобы план (собрать 5 кг сухих цветов) было выполнено? (При сушке теряется 85 % первоначального веса).*

© Cojuharova Tatiana, 2022

III) ***Исключать из текста условия задачи ее требование (найти, доказать)***

Продуктивно и полезно для ребят, чтобы в некоторых задачах они сами пытались определять, что можно найти, доказать, пользуясь математической ситуацией.

Например: *Определить вид четырехугольника, получившийся от последовательного соединения середин сторон любого выпуклого четырехугольника.*

Пусть каждый учащийся построит произвольный четырехугольник. При аккуратно выполненном построении они заметят, что получается параллелограмм (открытие гипотезы). Тут же возникает проблемная ситуация, мотивирующая необходимость обоснования этой гипотезы. У некоторых учащихся окажутся частные виды параллелограмма: ромб, прямоугольник, квадрат. Возникает новая интересная проблема: *от каких особенностей данного четырехугольника зависит вид полученного параллелограмма.*

Исключение из текста условия задачи её вопроса (требования) значительно повышает проблемность задания: учащиеся самостоятельно должны, вынуждены выдвигать гипотезы, проводить исследование [2, с. 95-98].

IV) ***Строить систему подготовительных упражнений, самостоятельное решение которых поможет учащимся открыть путь решения основной задачи***

В этом случаи, целесообразно выстроить систему подготовительных упражнений, самостоятельное выполнение которых приводит учащихся к решению более сложных задач [3, с.48-49].

Например: *Разложить на множители* $t^5 + t + 1$.

Подготовительные упражнения. *Разложить на множители:*

1_1. $x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1$.

1_2. $x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$.

Таким образом, используемые на практике данные приемы позволяют учащимся приучаться к самостоятельному преодолению трудностей, к поиску выхода из интересных математических ситуаций, что способствует развитию творческой, гармонически развитой личности. Постоянная постановка перед ребенком проблемных ситуаций приводит к тому, что он не «пасует» перед проблемами, а стремится их разрешить.

Библиография

1. МУХАМЕТЗЯНОВА, Ф. С. *Методические рекомендации по внедрению стандарта общего образования по математике*. Ульяновск: УИПКПРО, 2004. 88 с.
2. СЕЛЕВКО, Г. К. *Современные образовательные технологии*. М.: Народное образование, 1998. 256 с.
3. ШУВАЛОВА, Э. З.; АГАФОНОВ, Б. Г.; БОГАТЫРЁВ, Г. И. *Повторим математику*. Москва: Высшая школа, 1974. 468 с.

© Cojuharova Tatiana, 2022